Riešenie dopravných problémov

- v teórii LP existuje trieda úloh, ktorých špeciálne vlastnosti umožňujú využiť pri ich riešení iný, do istej miery jednoduchší matematický aparát
- medzi najznámejšie úlohy s takouto špeciálnou štruktúrou patria <u>dopravné problémy</u>
- uvažujme dodávateľsko – odberateľský systém:

m	dodávateľov
n	odberateľov (spotrebiteľov)
a_i	disponibilné zásoby i-teho dodávateľa ($i = 1,...,m$)
b_j	požiadavky j-teho odberateľa ($j = 1,...,n$)
c_{ij}	náklady na prepravu 1 jednotky tovaru od i-teho dodávateľa k j-temu odberateľovi
x_{ij}	objemy prepráv od i-teho dodávateľa k j-temu spotrebiteľovi

<u>*úloha*</u>: nájsť taký prepravný plán tovaru od dodávateľov k odberateľom, pri realizácii ktorého:

- každý výrobca odpredá celú svoju produkciu
- každý odberateľ plne uspokojí svoje požiadavky
- celkový objem prepravných nákladov v rámci uskutočnených dodávateľsko – odberateľských transferov bude minimálny

<u>hľadané veličiny</u>: x_{ij}

Vybilancovaná dopravná úloha:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$f(x) = \quad \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

za podmienok

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,2,...,m \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1,2,...,n \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (4)$$

(m+n) ohraničení (m . n) premenných

- postup pri riešení dopravnej úlohy:
   1) určenie VPBR primárnej úlohy
   2) preverenie platnosti kritéria optimálnosti pre sledované BPR na základe preverenia prípustnosti duálneho riešenia úlohy
   3) v prípade nesplnenia kritéria optimálnosti prechod k novému BPR, ktoré pri zachovaní primárnej prípustnosti úlohy znižuje jej duálnu neprípustnosť, a teda reprezentuje určité "priblíženie" k OR úlohy, pričom hodnota účelovej funkcie (HÚF) sa "zlepšuje"

Nevybilancovaná dopravná úloha:

$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \rightarrow$ fiktívny odberateľ; $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \rightarrow$ fiktívny dodávateľ

Základné pojmy:

- <u>Prípustným riešením úlohy</u> (1) až (4) nazveme maticu X=$\{x_{ij}\}$, prvky ktorej vyhovujú podmienkam (2) až (4).

- <u>Prípustné riešenie</u> X=$\{x_{ij}\}$ úlohy (1) až (4) nazveme <u>bázické</u>, ak vektory zodpovedajúce $x_{ij} > 0$ tvoria lineárne nezávislú sústavu.

- Spomedzi m+n rovníc sústavy (2) až (3) je presne m+n-1 lineárne nezávislých $\Rightarrow$ že bázické prípustné riešenie úlohy (1) až (4) môže mať najviac m+n-1 kladných x_{ij}.

- <u>Nedegenerované riešenie</u> – také prípustné bázické riešenie X=$\{x_{ij}\}$, ktoré obsahuje presne m+n-1 kladných zložiek x_{ij}.

- <u>Degenerované riešenie</u> – ak počet kladných x_{ij} je menší ako m+n-1.
  (degenerácia počas výpočtu, degenerované VPBR)

Vlastnosti dopravných úloh:

- Každá dopravná úloha má prípustné riešenie.
- Existuje prípustné riešenie, ktoré nemá viac ako m+n-1 kladných zložiek.
- Ak sú všetky a_i a b_j celé čísla, každé bázické riešenie sú celé čísla.
- Každá dopravná úloha má optimálne riešenie.

Duálna úloha k vybilancovanej dopravnej úlohe (1) – (4):

$$\max \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j b_j$$

$$u_i + v_j \le c_{ij} \quad i = 1,2,...,m \ j = 1,2,...,n \qquad (5)$$

u_i a v_j sú ľubovoľné čísla (premenné voľné v znamienku)

Veta o komplementárnosti v dopravných úlohách:

$$\left(u_i^* + v_j^* - c_{ij}\right)x_{ij}^* = 0 \qquad \forall i, j$$

- pre bázické zložky OR primárnej úlohy sa príslušné duálne vzťahy (5) realizujú ako *rovnosť*, t.j.

$$u_i + v_j = c_{ij} \qquad \text{pre } \forall \text{ bázické dvojice indexov (i,j)}$$

- pre premenné s hodnotou "0" optimálneho riešenia primárnej úlohy sa zodpovedajúce duálne vzťahy (5) realizujú ako *neostré nerovnice*, t.j.

$$u_i + v_j \le c_{ij} \qquad \text{pre } \forall \text{ dvojice indexov (i,j)}$$

pozn. ak $u_i + v_j = c_{ij}$ pre nebázické premenné x_{ij}, úloha má alternatívne OR

Ekonomická interpretácia duálnych premenných

u_i – “relatívne“ ocenenie prínosu vyplývajúceho z čerpania jednej jednotky tovaru od i-teho dodávateľa

v_j – “relatívne“ ocenenie prínosu vyplývajúceho z uspokojenia potreby j-teho odberateľa jednou jednotkou tovaru

potom

- HÚF = celkový “relatívny“ prínos implikovaný realizovaním všetkých zásob dodávateľov a uspokojením všetkých požiadaviek odberateľov pri uskutočnení určitej štruktúry prepráv

- ohraničenia duálnej úlohy – vyjadrujú vzťah medzi ocenením celkového prínosu spojeného s realizáciou prepravy 1 jednotky tovaru od i-teho dodávateľa k j-temu odberateľovi a medzi úrovňou nákladov prislúchajúcich tejto preprave

Interpretácia duálnych ohraničení dopravnej úlohy

1) pre realizované prepravy, kde x_{ij} je bázická premenná s *kladnou hodnotou* → na základe vety o komplementárnosti:

$$c_{ij} - (u_i + v_j) = 0$$

2) pre nerealizované prepravy, kde x_{ij} je premennou s *nulovou hodnotou* → 3 možné prípady

a) $c_{ij} - (u_i + v_j) = 0$ alternatívne riešenie

b) $c_{ij} > u_i + v_j$ $r_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) > 0$

Ak by sme sa rozhodli zaviesť takúto premennú do riešenia, tak prínos spojený s realizáciou tejto prepravy by bol menší ako zodpovedajúce prepravné náklady, a preto premenná x_{ij} neprichádza do úvahy pre zavedenie do riešenia. Uskutočnenie takejto prepravy by malo za následok zvýšenie HÚF o r_{ij} pre každú jednotku prepraveného tovaru.

c) $c_{ij} < u_i + v_j$ $r_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) < 0$

V tomto prípade – prínos by bol väčší ako náklady $\Rightarrow$ je vhodné x_{ij} zaviesť do riešenia, HÚF sa zníži o r_{ij} pre každú jednotku prepraveného tovaru.

Z vyššie uvedeného $\Rightarrow$ PBR je OR vtedy, ak platí

- $u_i + v_j = c_{ij}$ pre bázické dvojice (i,j)
- $u_i + v_j \le c_{ij}$ pre všetky dvojice (i,j)