Modely a metódy nelineárneho programovania

(Tézy k prednáške č. 12)

Téma prednášky

Metódy pre riešenie úloh zlomkového programovania

Prof. Dr. Michal Fendek

Katedra operačného výskumu a ekonmetrie

Ekonomická niverzita Bratislava

Dolnozemská 1

852 35 Bratislava

Zlomkové programovanie

Špeciálna trieda úloh nelineárneho programovania - úlohy, v ktorých je účelová funkcia podielom dvoch lineárnych funkcií rozhodovacích premenných a ohraničenia sú lineárne.

Úlohy s týmito vlastnosťami nazývame úlohami *zlomkového programovania*. Mnohé úlohy ekonomického rozhodovania možno formulovať ako úlohy zlomkového programovania.

- **Napríklad klasická úloha voľby optimálnej výrobnej stratégie firmy môže mať ako kritérium výberu optimálnej výrobnej stratégie z množiny kapacitne prípustných výrobných stratégií použitý ukazovateľ celkovej rentability firmy *R(x)*, t.j. podiel lineárnej funkcie celkového zisku *π(x)* firmy a lineárnej funkcie celkových výrobných nákladov *n(x)*:**

$$R(x) = \frac{\pi(x)}{n(x)}$$

Zlomkové programovanie

Všeobená formulácia úlohy *zlomkového programovania* má nasledovný tvar

$$f(\mathrm{x}) = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \alpha}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \beta} = \frac{\mathrm{c}^T \mathrm{x} + \alpha}{\mathrm{d}^T \mathrm{x} + \beta} \to \min$$

pri ohraničeniach **(1)**

$$\mathbf{Ax \le b}$$

$$\mathbf{x \ge 0}$$

kde

$\alpha, \beta \in R$, $c, d \in R^n$,

A je matica typu (m,n),

pričom *m* je počet ohraničení a *n* počet rozhodovacích premenných úlohy.

Zlomkové programovanie

• Metódy pre riešenie úloh zlomkového programovania využívajú tú jej vlastnosť, že množina prípustných riešení úlohy je konvexná a polyedrálna.

• Ak teda úloha zlomkového programovania (1) má optimálne riešenie, potom sa realizuje v krajnom bode množiny prípustných riešení úlohy.

• Navyše, každé lokálne minimum účelovej funkcie je na množine prípustných riešení úlohy zároveň aj globálnym minimom.

• Takže podobne ako v lineárnom programovaní, aj tu je perspektívne sa zaoberať procedúrami, ktoré umožňujú postupne skúmať krajné body množiny prípustných riešení úlohy.

• Na tomto princípe boli skonštruované viaceré algoritmy pre riešenie úloh zlomkového programovania, napr. algoritmus *Charnesa-Coopera*, alebo algoritmus *Gillmora-Gomoryho*.

Zlomkové programovanie

Algoritmus Charnesa-Coopera pre riešenie úloh zlomkového programovania

- **Skúmajme úlohu zlomkového programovania (1).**
- **Predpokladajme, že množina prípustných riešení úlohy**

$$D = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \}$$

je kompaktná a platí $\mathbf{d}^T\mathbf{x}+\beta>0$ pre $\forall\ \mathbf{x}\in D$.

- **Zavedením substituúcie**

$$z = \frac{1}{\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+\beta} \qquad \mathbf{y} = z\mathbf{x} \tag{2}$$

kde $z\in R$ a $y\in R^n$ do formulácie úlohy (7.40) a po jej jednoduchej úprave dostávame

$$\frac{\mathbf{c}^T\mathbf{x}+\alpha}{\mathbf{d}^T\mathbf{x}+\beta} = \left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}+\alpha\right)z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}z+\alpha z = \mathbf{c}^T\mathbf{y}+\alpha z$$

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{b} \le \mathbf{0} \ \rightarrow \mathbf{A}\frac{\mathbf{y}}{z} - \mathbf{b} \le \mathbf{0} \ \rightarrow \mathbf{Ay} - \mathbf{b}z \le \mathbf{0}$$

$$z = \frac{1}{\mathbf{d}^T\mathbf{x}+\beta} \ \rightarrow \mathbf{d}^{\mathrm{T}}z\mathbf{x}+\beta z = 1 \ \rightarrow \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\frac{\mathbf{y}}{z}z+\beta z = 1 \ \rightarrow \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}+\beta z = 1$$

Zlomkové programovanie

• **Úloha zlomkového programovania (1) sa potom transformuje na úlohu lineárneho programovania v nasledovnom tvare:**

$$F(y,z) = c^T y + \alpha z \rightarrow \min$$

pri ohraničeniach

$$Ay - zb \leq 0 \qquad (3)$$

$$d^T y + ßz = 1$$

$$y \geq 0,\ z \geq 0$$

• **Na riešenie tejto úlohy môžeme použiť priamy algoritmus simplexovej metódy.**

Zlomkové programovanie

• **Preskúmajme pozornejšie niektoré vlastnosti riešenia úlohy lineárneho programovania (3).**

Na ich základe budeme formulovať určité závery o vlastnostiach riešenia úlohy nelineárneho zlomkového programovania (1).

a) **Predovšetkým si všimnime, že ak (y, z) je prípustným riešením úlohy (3), potom musí platiť $z>0$.**

Totiž, ak $z=0$ a $y\neq 0$, tak potom

$$Ay \leq 0, \quad y \geq 0$$

čo je v rozpore s predpokladom o kompaktnosti množiny D.

Zlomkové programovanie

b) ďalej ukážeme, že ak (y^o, z^o) je optimálne riešenie sformulovanej úlohy lineárneho programovania (3), tak

$$x^o = \frac{y^o}{z^o}$$

je optimálnym riešením východiskovej úlohy zlomkového programovania (1).

- **Je zrejmé, že ak platí**

$$Ax^o \leq b, \quad x^o \geq 0$$

tak x^o je prípustným riešením východiskovej úlohy. Aby sme dokázali optimálnosť vektora x^o, budeme skúmať ľubovoľný prípustný vektor x, t.j. vektor, ktorý vyhovuje podmienkam

$$Ax \leq b, \; x \geq 0.$$

Zlomkové programovanie

Keďže platí predpoklad, že

$$\mathbf{d^T x + ß > 0}$$

tak potom vektor (y,z) so zložkami

$$z = \frac{1}{d^T x + \beta}$$

$$y = \frac{x}{d^T x + \beta}$$

je prípustným riešením úlohy (3). Pretože (y^o, z^o) je optimálnym riešením úlohy (3), musí platiť

$$\mathbf{c^T y^o + \alpha z^o \leq c^T y + \alpha z.}$$

- **Ak do tejto rovnice dosadíme hodnoty y^o, y a *z* dostaneme**

$$z^o (c^T x^o + \alpha) \leq \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta}$$

Zlomkové programovanie

Vydelme ľavú stranu nerovnice výrazom

$$\mathbf{d^T y^o + ßz^o},$$

ktorý sa rovná 1, takže upravená nerovnica je ekvivalentná s pôvodnou a dostávame

$$z^o \frac{c^T x^o + \alpha}{d^T y^o + \beta z^o} \le \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta}$$

a po uplatnení substitúcie $y^o = x^o z^o$ a vykrátení hodnôt z^o na ľavej strane nerovnice dostávame

$$z^o \frac{c^T x^o + \alpha}{d^T x^o z^o + \beta z^o} \le \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta}$$

$$\frac{c^T x^o + \alpha}{d^T x^o + \beta} \le \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta}$$

pre $\forall x \in D$, čím sme potvrdili, že

$$x^o = \frac{y^o}{z^o}$$

je optimálnym riešením východiskovej úlohy zlomkového programovania (1).

Zlomkové programovanie

Príklad

Riešme úlohu zlomkového programovania

$$f(x_1, x_2) = \frac{2x_1 - 4x_2 - 12}{x_1 + x_2 + 4} \to \min$$

pri ohraničeniach

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Riešenie:

Poznamenajme, že platí

$$c^T = (2, -4), \quad d^T = (1, 1), \quad a = -12, \quad ß = 4$$

Nakoľko platí podmienka

$$d^T x + b = x_1+x_2+4 > 0 \text{ pre } \forall(x_1,x_2)\in D,$$

tak použijeme transformáciu úlohy zlomkového programovania na úlohu lineárneho porgramovania v tvare (7.41) a dostávame:

$$F(y,z) = 2y_1 - 4y_2 - 12z \rightarrow \min$$

pri ohraničeniach

$$2y_1 + y_2 - 6z \leq 0$$

$$y_1 + y_2 + 4z = 1$$

$$y_1, y_2, z \geq 0.$$

Úlohu riešime s použitím dvojfázového algoritmu simlexovej metódy, pričom v prvom ohaničení použijeme doplnkovú a v druhom ohraničení umelú premennú. Postup výpočtov je uvedený v tabuľke č.7.16.

Tab.4.7.16: Riešenie transformovanej úlohy

x_B	c_B^I	c_B^{II}	y_1	y_2	z	s	w	b
s	0	0	2	1	-6	1	0	0
←w	0	1	1	1	4	0	1	1
	r_j^{II}		-1	-1	-4↑	0	0	1
s	0		7/2	5/2	0	1	3/2	3/2
←z	-12		1/4	1	0	0	1/4	1/4
	r_j^I		5	-1↑	0	0	3	-3
y_2	-4		7/5	1	0	2/5	3/5	3/5
z	-12		-1/10	0	1	-1/10	1/10	1/10
	r_j^I		32/5	0	0	2/5	18/5	18/5

Optimálne riešenie transformovanej úlohy je nasledovné:

$$(y_1, y_2, z) = (0, 3/5, 1/10)^T,\ \ F(y_1, y_2, z) = -18/5$$

a po spätnom dosadení získame optimálne riešenie východiskovej úlohy zlomkového programovania

$$x_1 = \frac{y_1}{z} = 0,\ x_2 = \frac{y_2}{z} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{10}} = 6,\ \ f(x_1, x_2) = -3.6$$