# Modely a metódy nelineárneho programovania

**(Tézy k prednáške č. 10)**

**Téma prednášky**

***Metódy prípustných smerov – nelin. ohraničenia***

**(Časť 2)**

**Prof. Dr. Michal Fendek**

**Katedra operačného výskumu a ekonmetrie**

**Ekonomická niverzita  Bratislava**

**Dolnozemská 1**

**852 35 Bratislava**

***November 2013***

# Metódy prípustných smerov

## Úloha s nelineárnymi ohraničeniami - nerovnicami

**Skúmajme úlohu nelineárneho programovania so sústavou nelineárnych ohraničení v tvare**

$$f(x) \to min$$

**pri ohraničeniach** **(7.20)**

$$g_i(x) \leq 0 \qquad i=1, ..., m$$

**kde**

**$m$ - počet ohraničení úlohy,**

**$f(x)$ - účelová funkcia, $f$: $R^n \to R$,**

**$g_i(x)$ - funkcia sústavy ohraničení, $g_i$: $R^n \to R$, $i=1,...,m$**

**Naformulujme teraz *postačujúce* podmienky pre existenciu prípustného progresívneho smeru d prechodu od prípustného riešenia x k ďalšiemu prípustnému riešeniu $x^{k+1}$ úlohy.**

# Metódy prípustných smerov

**Skúmajme úlohu (7.20). Nech x je prípustné riešenie úlohy a predpokladajme, že $I$ je množina indexov aktívnych ohraničení úlohy, pre ktorú platí $I=\{i \;/\; g_i(x) = 0\}$.**

**Predpokladajme ďalej, že funkcie $f$ a $g_i$ pre $i \in I$ sú diferencovateľné v bode x a funkcie $g_i$ sú spojité pre $i \notin I$ v tomto bode.**

**Potom, ak platí**

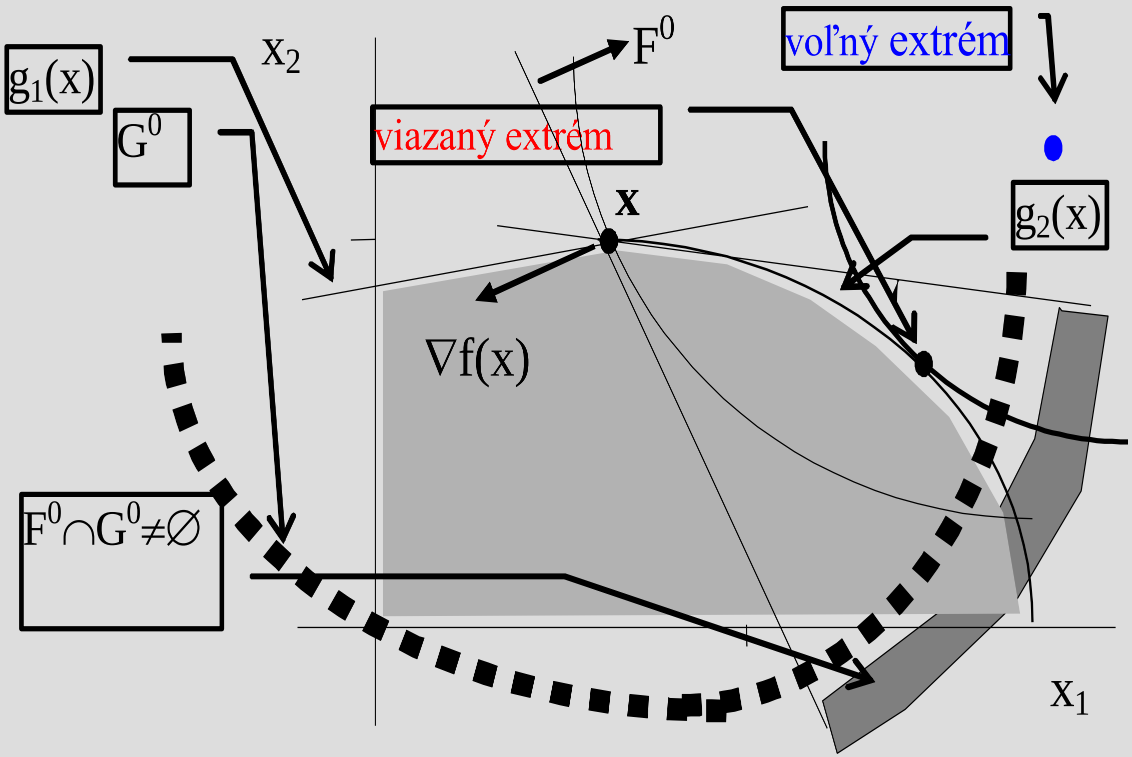
$$\nabla f(x)^T d < 0$$

$$\nabla g_i(x)^T d < 0 \text{ pre } i \in I$$

**tak vektor d je prípustným progresívnym smerom v bode x.**

# Metódy prípustných smerov

Obr.č. Množina prípustných a pogresívnych smerov úlohy



# Metódy prípustných smerov

V dôsledku toho je potrebné formulovať podmienky pre definovanie prípustného smeru v tvare ostrej nerovnice nasledovne

$$\nabla g_i(x)^T d < 0$$

Aby sme našli vektor d, ktorý vyhovuje nerovniciam $\nabla f(x)^T d<0$, resp.$\nabla g_i(x)^T d<0$ pre $i \in I$, je potrebné minimalizovať maximum z hodnoty $\nabla f(x)^T d$, resp. $\nabla g_i(x)^T d$ pre $i \in I$.

Zaveďme pomocnú premennú *z*, pre ktorú platí

$$z = \max \{\nabla f(x)^T d;\ \nabla g_i(x)^T d, \text{ pre } i \in I\}$$

a zavedieme normujúce ohraničenia analogické ako v úlohe $N_1$,

tak vektor prípustného progresívneho smeru **d** určíme na základe riešenia nasledovnej úlohy lineárneho programovania:

# Metódy prípustných smerov

$$z \to min$$

**pri ohraničeniach**

$$\nabla f(x)^T d - z \leq 0 \qquad (7.21)$$

$$\nabla g_i(x)^T d - z \leq 0, \quad i \in I$$

$$-1 \leq d_j \leq 1, \quad j=1,\ldots,n$$

**Nech ($z^o$, $d^o$) je vektor optimálneho riešenia úlohy (7.21). Potom, ak $z^o$<0, tak je zrejmé, že vektor $d^o$ je vektorom prípustného progresívneho smeru.**

**Na druhej strane, dá sa ukázať, že ak $z^o$=0, tak aktuálne riešenie x vyhovuje podmienkam optimálnosti *F. Johna.***

# Metódy prípustných smerov

## Zoutendijkov algoritmus pre úlohu s nelineárnymi ohraničeniami - nerovnicami

***Inicializačná fáza***

**Nájdeme východiskové prípustné riešenie $x^1$ také, aby platilo**

$$g_i(x^1) \le 0 \quad \text{pre } i=1,\dots,m$$

**Položíme *k=1* a prejdeme k výpočtovej fáze.**

***Výpočtová fáza***

***Krok 1°.***

**Položíme $I=\{\, i \mid g_i(x^k)=0 \,\}$ a riešime nasledovnú úlohu lineárneho programovania**

$$z \to min$$

**pri ohraničeniach**

$$\nabla f(x^k)^T d - z \le 0$$

$$\nabla g_i(x^k)^T d - z \le 0, \quad i \in I$$

$$-1 \le d_j \le 1, \quad j=1,\dots,n$$

**Nech $(z^o, d^o)$ je vektor optimálneho riešenia tejto úlohy.**

**Potom,**

**a) ak $z^o=0$, tak aktuálne riešenie $x^k$ vyhovuje podmienkam optimálnosti *F. Johna* a algoritmus končí,**

**b) ak $z^o<0$, tak vektor $d^o$ je vektorom prípustného progresívneho smeru, prejdeme ku kroku 2°.**

# Metódy prípustných smerov

***Krok 2°.***

**- optimálnu dĺžku kroku $\lambda^k$ určíme ako optimálne riešenie nasledovnej úlohy jednorozmernej minimalizácie**

$$f(x^k+\lambda d^k) \to \min$$

**pri ohraničení**

$$0 \le \lambda \le \lambda_{max}$$

**pričom $\lambda_{max}$ je definované vzťahom**

$$\lambda_{max} = \sup \{ \lambda \mid g_i(x^k+\lambda d^k) \le 0,\ i=1,\dots,m \}$$

**- vypočítame**

$$x^{k+1}=x^k+\lambda d^k$$

**zameníme $k \to k+1$ a vrátime sa na *Krok 1°* výpočtovej fázy.**

# Metódy prípustných smerov

**Príklad č.7.11**

**S použitím Zoutendijkovej metódy prípustných smerov riešte nasledovnú úlohu**

$$f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \rightarrow min$$

**pri ohraničeniach**

$$x_1 + 5x_2 \leq 5$$

$$2x_1^2 - x_2 \leq 0$$

$$- x_1 \leq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$

**Riešenie:**

***Inicializačná fáza***

**- ako východiskové prípustné riešenie zvolíme bod $x^1=(0, 0.75)^T$,**

**- gradient účelovej funkcie má tvar**

$$\nabla f(x) = (4x_1-2x_2-4,\ 4x_2-2x_1-6)^T$$

**- položíme *k=1* a prejdeme na výpočtovú fázu.**

# Metódy prípustných smerov

## *Výpočtová fáza*

• **Výpočty prvej iterácie uvádzame.**

• **Výpočty ľalšich iterácií môže čitateľ vykonať sám analogickým spôsobom. Výpočet je zastavený po 4. iterácii, nakoľko** $\left| f(x^4) - f(x^3) \right| = 0.1226$**, čo predstavuje akceptovateľnú presnosť.**

• **Výsledky výpočtov pre 1. až 4. iteráciu sú uvedené v tabuľke č.7.11. Poznamenávame, že úloha bola riešená aj systémom GAMS, ktorý však nepoužíva metódu prípustných smerov, ale metódu MINOS.**

**Bolo nájdené optimálne riešenie úlohy**

$$x^o = (0.65887, 0.86822)^T, f(x^o) = -6.559.$$

• **Vidíme, že toto riešenie je dostatočne blízke riešeniu úlohy nájdenému na 4. iterácii aplikovaného Zoutendijkovho algoritmu.**

# Metódy prípustných smerov

*1.iterácia*

**a) určenie vektora prípustného progresívneho smeru**

**V bode $x^1=(0, 0.75)^T$ má gradient účelovej funkcie súradnice $\nabla f(x^1)=(-5.5, -3.0)^T$ a množina aktívnych ohraničení pre bod $x^1$ je I={3}. Gradient aktívneho ohraničenia má súradnice $\nabla g_3(x^1)=(-1,0)^T$. Vektor prípustného progresívneho smeru nájdeme riešením nasledovnej úlohy lineárneho programovania**

$$z \to \min$$

**pri ohraničeniach**

$$-5.5d_1 - 3d_2 - z \leq 0$$

$$-d_1 \qquad - z \leq 0$$

$$d_1 \in \langle -1,1 \rangle,\ d_2 \in \langle -1,1 \rangle$$

**Túto úlohu riešime s použitím algoritmu pre riešenie úloh lineárneho programovania s ohraničenými premennými. Optimálne riešenie úlohy sa realizuje v bode**

$$d^1=(1, -1)^T,\ z^1= -1$$

**Nakoľko $z^1 < 0$, tak bod $x^1$ nie je optimálnym riešením úlohy. Vektor $d^1$ je potom prípustným progresívnym smerom v bode $x^1$ a nasledujúci bod analýzy má všeobecné vyjadrenie**

$$x^2 = x^1 + \lambda d^1 = (0,0.75)^T + \lambda(1,-1)^T = (\lambda,0.75-\lambda)^T$$

# Metódy prípustných smerov

**b) určenie optimálnej dĺžky kroku $\lambda$**

**Optimálnu dĺžku kroku určíme ako riešenie nasledovnej úlohy jednorozmernej minimalizácie pre premennú $\lambda$**

$$f(\lambda) = f(\lambda, 0.75-\lambda) = 6\lambda^2 - 2.5\lambda - 3.375 \to \min$$

$$0 \le \lambda \le \lambda_{max}$$

**pričom hornú hranicu dĺžky kroku určíme na základe vzťahu**

$$\lambda_{max} = \sup \{ \lambda \,″\, g_i(x^k + \lambda d^k) \le 0,\ i=1,\dots,m \}$$

$$\lambda_{max} = \sup \{ \lambda \mid$$

$$\lambda + 3.85 - 5\lambda \le 5,$$

$$2\lambda^2 - 0.75 + \lambda \le 0,$$

$$-\lambda \le 0,$$

$$\lambda - 0.75 \le 0 \}$$

**ľahko sa presvedčíme o tom, že najnižšia horná hranica prípustných hodnôt $\lambda$, t.j. hľadané supremum má hodnotu**

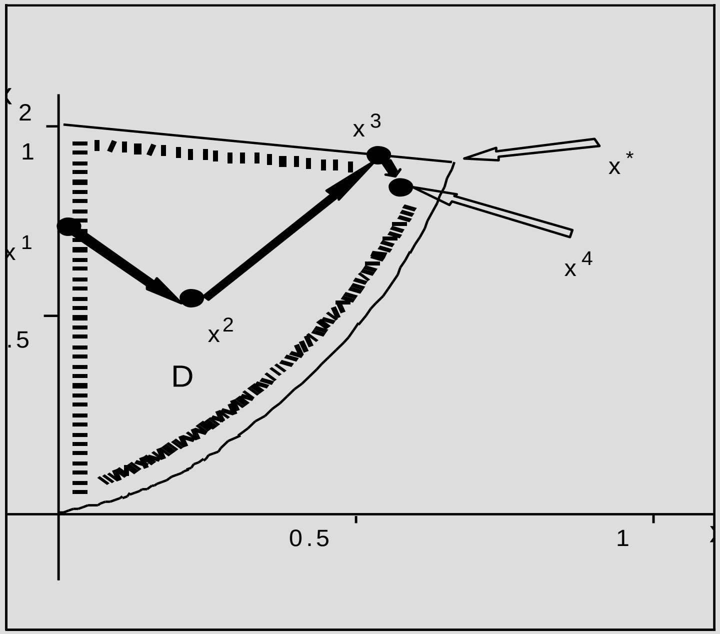
$$\lambda_{max} = 0.414$$

# Metódy prípustných smerov

**Určme stacionárny bod funkcie f(λ):**

**- overme nutnú podmienku existencie extrému**

**Obr.č.7.8: Geometrická interpretácia riešenia**




$$f'(\lambda) = 12\lambda - 2.5 = 0 \rightarrow \lambda^{o} = 0.2083$$

**a vidíme, že stacionárny bod vyhovuje definovanému intervalu parametra λ,**

**- overme postačujúcu podmienku pre extrém typu minima v stacionárnom bode:**

**$f''(\lambda) = 12 > 0$.**

# Metódy prípustných smerov

**Funkcia je rýdzo konvexná a stacionárny bod je bodom jediného globálneho minima funkcie f(λ). Na základe optimálnej dĺžky kroku $\lambda^o$=0.2083 vypočítame súradnice nasledu-júceho bodu $x^2$ a dostávame**

$$x^2 = x^1 + \lambda d^1 = (0,0.75)^T + 0.2083(1,-1)^T = (0.2083,\ 0.5417)^T$$

- **položíme *k=k+1=2* a prejdeme na druhú iteráciu výpočtovej fázy algoritmu.**
-

| k | | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x^k$ | (0.00,0.75) | (0.208,0.547) | (0.555,0.888) | (0.648,0.839) |
| | $f(x^k)$ | -3.3750 | -3.6354 | -6.3455 | -6.4681 |
| určenie | $\nabla f(x^k)$ | (-5.500,-3.00) | (-4.25,-4.25) | (-3.556,-3.555) | (-3.088,-3.937) |
| príputného | $d^k$ | (0.000,1.000) | (1.000,1.000) | (1.000,-0.532) | (-0.517,1.000) |
| smeru | $z^k$ | -1.000 | -8.600 | -1.663 | -2.34 |
| určenie | $\lambda_{max}$ | 0.4140 | 0.3472 | 0.0924 | 0.0343 |
| dĺžky kroku | $\lambda^k$ | 0.2083 | 0.3472 | 0.0934 | 0.0343 |
| | $x^{k+1}$ | (0.208,0.542) | (0.555,0.889) | (0.648,0.839) | (0.630,0.874) |

*Tab.č.7.11: Sumárne výsledky jednotlivých iterácií*

**Geometrická interpretácia procesu riešenia úlohy v priebehu prvých štyroch iterácií je uvedená na obr.č.7.8.**