Nelineárne optimalizačné modely a metódy

Téma prednášky č.10

Metódy prípustných smerov – lineárne ohraničenia

(Časť 1)

Prof. Ing. Michal Fendek, CSc.

Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Ekonomická univerzita
Dolnozemská 1
852 35 Bratislava

Metódy prípustných smerov

Princíp:

prechod od jedného prípustného riešenia k druhému prípustnému riešeniu, ktorému zodpovedá "lepšia" hodnota účelovej funkcie.

Typickú stratégia algoritmov prípustných smerov možno opísať nasledovnou schémou:

1. zvolíme prípustné riešenie $x^k \in D$ a nájdeme *vektor prípustného smeru* d^k taký, aby pre dostatočne malé $\lambda \to 0$, $\lambda > 0$ boli splnené nasledovné dve podmienky:

a) $x^k + \lambda d^k$ je prípustné riešenie, t.j. platí $x^k + \lambda d^k \in D$,

b) hodnota účelovej funkcie v bode $x^k + \lambda d^k$ je lepšia ako v bode x^k.

2. po nájdení prípustného progresívneho smeru d^k sa rieši úloha jednorozmernej minimalizácie s cieľom určiť číslo λ, t.j stanoviť, ako najďalej sa možno presunúť v smere vektora d^k. Tým určíme nové prípustné riešenie x^{k+1} a proces sa opakuje.

Zoutendijkov algoritmus pre riešenie úloh s lineárnymi a nelineárnymi ohraničeniami

Skúmajme úlohu

$$f(x) \to min$$

pri ohraničeniach

$$\boldsymbol{x} \in D$$

kde $f\colon R^n \to R$ a D je neprázdna podmnožina R^n. Potom:

a) nenulový vektor **d** budeme nazývať *prípustným smerom* v bode $\mathbf{x} \in D$, ak $\exists\ \delta>0$ také, že platí

$$\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{d} \in D, \text{ pre } \forall\lambda \in (0,\delta)$$

b) nenulový vektor **d** budeme nazývať *prípustným progresívnym smerom* v bode $\mathbf{x} \in D$, ak $\exists\ \delta>0$, že platí

$$f(x + \lambda\mathbf{d}) < f(\mathbf{x}), \text{ pričom } x+\lambda d \in D, \textit{ pre } \forall\lambda \in (0,\delta)$$

ÚLOHA S LINEÁRNYMI OHRANIČENIAMI

Skúmajme úlohu nelineárneho programovania so sústavou lineárnych ohraničení v tvare

$$f(x) \to min$$

pri ohraničeniach

$$\mathbf{Ax \leq b}$$

$$\mathbf{Wx = w}$$

pričom matica A má rozmer [m,n], matica W má rozmer [L,n], $b \in R^m$, $w \in R^L$ a funkcia $f: R^n \to R$ je diferencovateľná. Naformulujme teraz *nutné a postačujúce* podmienky pre existenciu prípustného progresívneho smeru d prechodu od prípustného riešenia x k ďalšiemu prípustnému riešeniu úlohy.

Skúmajme predchádzajúcu úlohu . Nech x je prípustné riešenie úlohy a predpokladajme, že platí

$$A_1x = b_1$$

$$A_2x < b_2$$

pričom $A^T=[A_1^T, A_2^T]$ a $b^T=[b_1^T, b_2^T]$. Potom nenulový vektor d je prípustným smerom v bode x vtedy a len vtedy, ak platí

$$A_1d \leq 0, Wd = 0.$$

Ak navyše platí

$$\nabla f(x)^T d < 0$$

tak vektor d je prípustným progresívnym smerom v bode x.

Poznámka: **vektor d nemusíme skúmať vzhľadom na podmienku $A_2x<b_2$, nakoľko ak x je vnútorný bod množiny *D* vzhľadom na podmienku $A_2x\leq b_2$, tak pre každý vektor prípustného progresívneho smeru d možno nájsť také $\lambda>0$, že platí $A_2(x+\lambda d)\leq b_2$.**

Príklad

Skúmajme nasledovnú úlohu

$$f(x_1,x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \to min$$

pri ohraničeniach

$$2x_1 + x_2 \le 4$$

$$x_1 + 3x_2 \le 6$$

$$-x_1 \le 0$$

$$-x_2 \le 0$$

Preskúmajme bod x=(1.2, 1.6)^T. Tento bod je krajným bodom množiny prípustných riešení úlohy. Ľahko sa presvedčíme o tom, že aktívnymi sú prvé dve ohraničenia, takže platí

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zároveň poznamenávame, že v úlohe neexistujú ohraničenia v tvare rovníc, takže maticu W pre túto úlohu neexistuje.

Metódy prípustných smerov

Vektor d je prípustným smerom vtedy a len vtedy, ak platí $A_1 d \leq 0$, t.j.

$$2d_1 + d_2 \leq 0$$

$$d_1 + 3d_2 \leq 0$$

Uvedené rovnice definujú dve polroviny, ktorých prienik G^o predstavuje konvexný kužel prípustných smerov. Ak vektor d navyše spĺňa nerovnosť

$$\nabla f(x)^T d < 0$$

kde

$$\nabla f(x) = \nabla f(1.2, 1.6) = (-5.6, -0.8)^T$$

t.j. platí

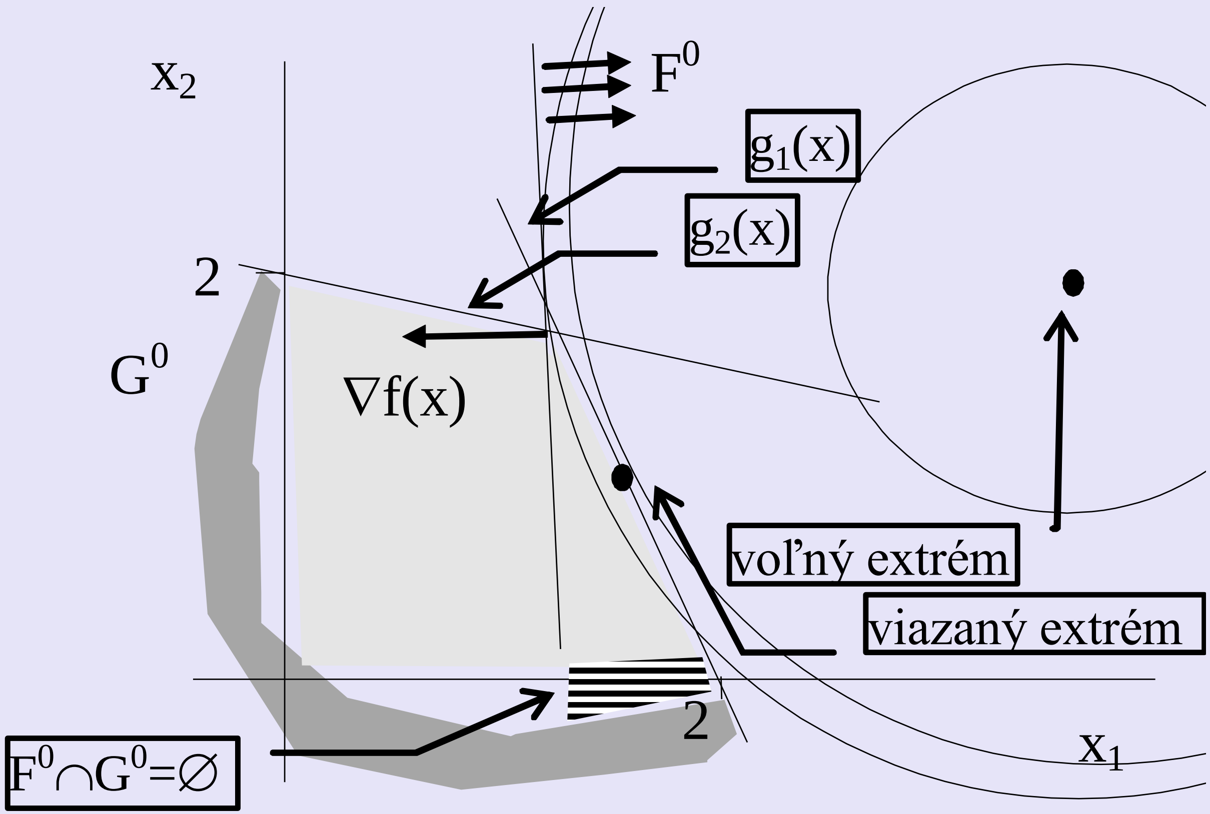
$$-5.6d_1 - 0.8d_2 < 0$$

tak otvorený polpriestor

$$F^o = \{(d_1, d_2) \;/\; -5.6d_1 - 0.8d_2 < 0\}$$

predstavuje množinu progresívnych smerov. Prienik polpriestoru progresívnych smerov F^o a kužela prípustných smerov G^o reprezentuje kužel prípustných progresívnych smerov $F^o \cap G^o$.

Metódy prípustných smerov



Metódy prípustných smerov

Množinu prípustných smerov tvoria vektory d, ktoré vyhovujú nasledovným podmienkam

$$\nabla f(x)^T d < 0, \quad A_1 d \le 0, \quad Wd = 0.$$

Hľadanie vektora d týchto vlastností možno realizovať prostredníctvom riešenia nasledovnej optimalizačnej úlohy

$$\nabla f(x)^T d \rightarrow min$$

pri ohraničeniach

$$A_1 d \le 0$$

$$Wd = 0$$

V súvislosti s riešením úlohy (7.15) však treba upozorniť na nasledovný problém. Ak totiž existuje taký vektor d, pre ktorý platia výťahy $\nabla f(x)^T d < 0$, $A_1 d \le 0$, $Wd = 0$, tak potom tieto vzťahy platia aj pre vektor λd pre $\forall \lambda \rightarrow \infty$ a optimálna hodnota účelovej funkcie úlohy (7.15) je potom zdola neohraničená a platí

$$\nabla f(x)^T d \rightarrow -\infty.$$

Do úlohy treba doplniť podmienky ohraničujúce hodnoty zložiek vektora d, resp. ohraničujúce hodnotu účelovej funkcie úlohy.

V odbornej literatúre sa obvykle uvádzajú naledovné tri formy normovanej úlohy

Úloha N_1	Úloha N_2	Úloha N_3
$\nabla f(x)^T d \to \min$	$\nabla f(x)^T d \to \min$	$\nabla f(x)^T d \to$
$A_1 d \le 0$	$A_1 d \le 0$	$A_1 d \le 0$
$Wd = 0$	$Wd = 0$	$Wd = 0$
$-1 \le d_j \le 1,\ j=1,\ldots,n$	$d^T d \le 1$	$\nabla f(x)^T d \ge -1$

Metódy prípustných smerov

Optimálna hodnota účelovej funkcie ani jednej z normovaných úloh N_1, N_2, N_3 nemôže byť kladná, nakoľko existuje prípustné riešenie d=0, pre ktoré $\nabla f(x)^T d=0$. Môžu nastať nasledovné dva prípady:

I. **ak je optimálna hodnota účelovej funkcie jednej z úloh N_1, N_2, N_3 záporná, tak optimálne riešenie úlohy je vektorom *prípustného a progresívneho smeru,***

II. **ak je optimálna hodnota účelovej funkcie rovná nule, tak aktuálny bod x^k vyhovuje podmienkam optimálnosti Kuhna-Tuckera.**

• Prezentovali sme teda spôsob, ako určiť pre aktuálne prípustné riešenie úlohy vektor prípustného progesívneho smeru pre prechod k nasledujúcemu prípustnému riešeniu úlohy, resp. ukázať, že aktuálne riešenie vyhovuje podmienkam optimálnosti Kuhna-Tuckera.

Ďalším problémom je výpočet optimálnej dĺžky kroku λ.

Nech je dané aktuálne prípustné riešeie úlohy x^k a zodpovedajúci vektor prípustného progresívneho smeru d^k. Ako nasledujúci bod na trajektórii budeme skúmať bod

$$x^{k+1} = x^k + \lambda^k d^k$$

kde optimálna dĺžka kroku λ^k je určená na základe riešenia nasledovnej úlohy jednorozmernej minimalizácie:

$$f(x^k+\lambda d^k) \to \min$$

pri ohraničeniach

$$A(x^k+\lambda d^k) \le b$$

$$W(x^k+\lambda d^k) = w$$

$$\lambda \ge 0$$

Za predpokladu, že maticu A a vektor b možno dekomponovať na submatice $A^T=[A_1^T,A_2^T]$ a subvektory $b^T=[b_1^T,b_2^T]$, pričom platí $A_1x_1=b_1$ a $A_2x_2<b_2$, môžeme úlohu jednorozmernej minimalizácie (7.16) zjednodušiť na základe nasledovných poznatkov:

Metódy prípustných smerov

1. Keďže platí

$$Wx^k = w \text{ a súčasne } Wd^k = 0,$$

tak ohraničenie $W(x^k+\lambda d^k) = w$ je nadbytočné.

2. Keďže platí

$$A_1x^k = b_1 \text{ a súčasne } A_1d^k \leq 0,$$

tak platí $A_1(x^k+\lambda d^k) \leq b_1$ pre $\forall\lambda\geq 0$

3. Takže v konečnom dôsledku sa ohraničenia úlohy (1.16) redukujú na kontrolu splnenia nasledovnej podmienky pre $\forall\lambda\geq 0$:

$$A_2(x^k+\lambda d^k) \leq b_2$$

a odtiaľ po úprave dostávame

$$A_2x^k + A_2\lambda d^k \leq b_2$$

$$\lambda A_2d^k \leq b_2 - A_2x^k,$$

resp.

$$\lambda d^o \leq b_o$$

po použití substitúcie

$$d^o=A_2d^k, \qquad b^o = b_2 - A_2x^k$$

Metódy prípustných smerov

Takže vychádzajúc z uvedených troch záverov môžeme úlohu jednorozmernej minimalizácie preformulovať nasledovne

$$f(x^k+\lambda d^k) \rightarrow \min$$

pri ohraničení

$$0 \le \lambda \le \lambda_{max}$$

kde pri použití substitúcií (1.17) platí

$$\lambda_{\max} = \begin{cases} \min\{ \dfrac{b_i^o}{d_i^o} \mid d_i^o > 0 \}, & ak\ \exists i : d_i^o > 0 \\ \infty & ak\ d_i^o \le 0\ pre\ \forall i \end{cases} \tag{1.19}$$

Zoutendijkov algoritmus pre úlohu s lineárnymi ohraničeniami

Algoritmus je formulovaný pre úlohu nelineárneho programovania v tvare (7.14), pričom požadujeme diferencovateľnosť účelovej funkcie *f(x)*.

Inicializačná fáza

Nájdeme východiskové prípustné riešenie x^1 také, aby platilo

$$Ax^1 \le b$$

$$Wx^1 = w$$

Položíme *k=1* a prejdeme k výpočtovej fáze.

Výpočtová fáza

Krok 1°.

Je dané prípustné riešenie x^k.

Za predpokladu, že maticu A a vektor b možno dekomponovať na submatice $A^T=[A_1^T,A_2^T]$ a subvektory $b^T=[b_1^T,b_2^T]$, pričom platí $A_1x_1=b_1$ a $A_2x_2<b_2$, riešime úlohu

$$\nabla f(x^k)^T d \to min$$

pri ohraničeniach

$$A_1 d \le 0$$

$$Wd = 0$$

$$-1 \le d_j \le 1,\ j=1,\ldots,n$$

a jej optimálne riešenie predstavuje vektor *prípustného progresívneho smeru* d^k.

Potom:

a) ak $\nabla f(x^k)^T d^k = 0$, tak aktuálny prípustný bod x^k vyhovuje podmienkam optimálnosti Kuhna-Tuckera a algoritmus končí.

b) ak $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$, tak prejdeme na *Krok 2°*.

Krok 2°.

- optimálnu dĺžku kroku λ^k určíme ako optimálne riešenie úlohy jednorozmernej minimalizácie

$$f(\mathbf{x}^k+\lambda \mathbf{d}^k) \to \min$$

pri ohraničení

$$0 \le \lambda \le \lambda_{max}$$

pričom λ_{max} je definované vzťahom (1.19).

- určíme

$$\mathbf{x}^{k+1}=\mathbf{x}^k+\lambda \mathbf{d}^k$$

- definujeme matice $\mathbf{A}^1$, $\mathbf{A}^2$, zameníme $k \to k+1$ a vrátime sa na *Krok 1°* výpočtovej fázy.

Príklad č.7.10

S použitím metódy prípustných smerov Zoutendijka riešte nasledovné úlohu

$$f(x_1,x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow min$$

pri ohraničeniach

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$-x_1 \leq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$

Riešenie:

Inicializačná fáza

- ako východiskové prípustné riešenie zvolíme bod $x^1=(2,0)^T$,
- poznamenávame, že gradient účelovej funkcie má tvar

$$\nabla f(x) = (2x_1-8,\ 2x_2-4)^T$$

- položíme $k=1$ a prejdeme na výpočtovú fázu.

Metódy prípustných smerov

Výpočtová fáza

Každá iterácia výpočtovej fázy algoritmu obsahuje

(1) riešenie subproblému pre určenie vektora prípustného progresívneho smeru a

(2) riešenie subproblému jednorozmernej minimalizácie pre určenie optimálnej dĺžky kroku.

1.iterácia

a) určenie vektora prípustného progresívneho smeru

V bode $x^1=(2,0)^T$ má gradient účelovej funkcie súradnice $\nabla f(x^1)=(-4,-4)^T$ a množina aktívnych ohraničení pre bod x^1 zodpovedá 1. a 4. podmienke úlohy, t.j. I={1,4}. Matice A_1, A_2 majú nasledovné vyjadrenie

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Metódy prípustných smerov

Vektor prípustného progresívneho smeru nájdeme riešením nasledovnej úlohy lineárneho programovania

$$\nabla f(x^1)^T d = -4d_1 - 4d_2 \to \min$$

pri ohraničeniach

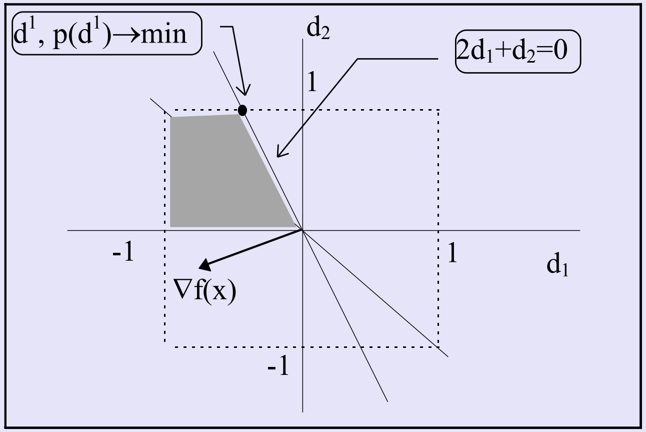
$$2d_1 + d_2 \le 0$$

$$-d_2 \le 0$$

$$d_1 \in \langle -1,1 \rangle,\ d_2 \in \langle -1,1 \rangle$$

Geometrická interpretácia riešenia úlohy je uvedená na obr.č.7.5.

Obr.č.7.5: Určenie vektora d^1



Optimálne riešenie úlohy sa realizuje v bode

$$\mathbf{d}^1 = (-1/2,\ 1)^T$$

a **hodnota účelovej funkcie** pomocnej úlohy v tomto bode je

$$\nabla f(\mathbf{x}^1)^T \mathbf{d} = -2 < 0$$

takže bod $\mathbf{x}^1$ nie je optimálnym riešením úlohy. Vektor $\mathbf{d}^1$ je potom prípustným progresívnym smerom v bode $\mathbf{x}^1$ a nasledujúci bod trajektórie má všeobecné vyjadrenie

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \lambda \mathbf{d}^1 = (2,0) + \lambda(-1/2,1) = (2-\lambda/2,\lambda).$$

b) určenie optimálnej dĺžky kroku λ

Vypočítajme $\mathbf{b}^0$, $\mathbf{d}^0$ podľa vzťahu (7.17). Dostávame

$$\mathbf{b}^0 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{A}_2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d}^0 = \mathbf{A}_2\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1\backslash 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Metódy prípustných smerov

- otimálnu dĺžku kroku určíme ako riešenie nasledovnej úlohy jednorozmernej minimalizácie pre premennú λ

$$f(\lambda) = f(2-\lambda/2,\lambda) = 5/4\lambda^2 - 2\lambda + 8 \rightarrow \min$$

$$0 \leq \lambda \leq \lambda_{max}$$

pričom hornú hranicu dĺžky kroku určíme na základe vzťahu (7.19) a dostávame

$$\lambda_{max} = \min\{8/5, 4\} = 8/5$$

- učme stacionárny bod funkcie $f(\lambda)$:

  - overme nutnú podmienku existencie extrému:

$$f'(\lambda) = 5/2\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda^o = 4/5$$

a vidíme, že stacionárny bod vyhovuje definovanému intervalu parametra λ

  - overme postačujúcu podmienku pre extrém typu minima v stacionárnom bode:

$$f''(\lambda) = 5/2 > 0,$$

takže funkcia je rýdzokonvexná a stacionárny bod je bodom jediného globálneho minima funkcie $f(\lambda)$.

Na základe optimálnej dĺžky kroku $\lambda^o = 4/5$ vypočítame súradnice nasledujúceho bodu x^2 a dostávame

$$x^2 = (2 - \lambda^o/2, \lambda^o) = (8/5, 4/5)^T$$

- položíme *k=k+1=2* a prejdeme na druhú iteráciu výpočtovej fázy algoritmu.

2.iterácia

a) určenie vektora prípustného progresívneho smeru

V bode $x^2=(8/5,4/5)$ má gradient účelovej funkcie súradnice $\nabla f(x^2)=(-24/5,-12/5)^T=(-2,-1)^T$ a množina aktívnych ohraničení pre bod x^2 zodpovedá 1. podmienke úlohy, t.j. I={1}. Matice A_1, A_2 majú nasledovné vyjadrenie

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a vektor prípustného progresívneho smeru nájdeme riešením nasledovnej úlohy lineárneho programovania

$$\nabla f(x^2)^T d = -2d_1 - d_2 \rightarrow \min$$

pri ohraničeniach

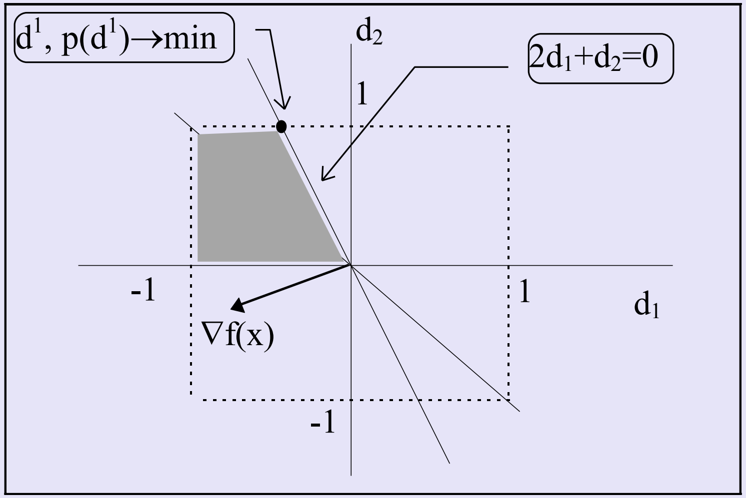
$$2d_1 + d_2 \le 0$$

$$d_1 \in \langle -1,1 \rangle,\ d_2 \in \langle -1,1 \rangle$$

Metódy prípustných smerov

Geometrická interpretácia riešenia úlohy je uvedená na obr.č.7.6. Úloha má alternatívne optimálne riešenie, ktoré sa realizuje v dvoch krajných bodoch:

Obr.č.76: Určenie vektora d^2



$$\mathbf{d}^2=(-1/2, 1)^T,\ \mathbf{d}^{2'}=(0, 0)^T$$

Hodnota účelovej funkcie pomocnej úlohy v týchto bodoch je však rovná nule, t.j. platí

$$\nabla f(\mathbf{x}^2)^T \mathbf{d}^2 = \nabla f(\mathbf{x}^2)\mathbf{d}^{2'} = 0$$

takže bod

$$\mathbf{x}^2 = (8/5, 4/5)^T$$

je optimálnym riešením úlohy, ktorému zodpovedá hodnota účelovej funkcie $f(\mathbf{x}^2) = 36/5$.