Nelineárne optimalizačné modely a metódy

Téma prednášky č. 10

Metódy prípustných smerov

(Časť 1- príklad)

Prof. Ing. Michal Fendek, CSc.

Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Ekonomická univerzita
Dolnozemská 1
852 35 Bratislava

Príklad č.7.10

S použitím metódy prípustných smerov Zoutendijka riešte nasledovné úlohu

$$f(x_1,x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow min$$

pri ohraničeniach

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$-x_1 \leq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$

Riešenie:

Inicializačná fáza

- ako východiskové prípustné riešenie zvolíme bod $x^1=(2,0)^T$,
- poznamenávame, že gradient účelovej funkcie má tvar

$$\nabla f(x) = (2x_1-8,\ 2x_2-4)^T$$

- položíme $k=1$ a prejdeme na výpočtovú fázu.

Výpočtová fáza

Každá iterácia výpočtovej fázy algoritmu obsahuje

(1) riešenie subproblému pre určenie vektora prípustného progresívneho smeru a

(2) riešenie subproblému jednorozmernej minimalizácie pre určenie optimálnej dĺžky kroku.

1.iterácia

a) určenie vektora prípustného progresívneho smeru

V bode $x^1=(2,0)^T$ má gradient účelovej funkcie súradnice $\nabla f(x^1)=(-4,-4)^T$ a množina aktívnych ohraničení pre bod x^1 zodpovedá 1. a 4. podmienke úlohy, t.j. I={1,4}. Matice A_1, A_2 majú nasledovné vyjadrenie

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Metódy prípustných smerov

Vektor prípustného progresívneho smeru nájdeme riešením nasledovnej úlohy lineárneho programovania

$$\nabla f(x^1)^T d = -4d_1 - 4d_2 \rightarrow \min$$

pri ohraničeniach

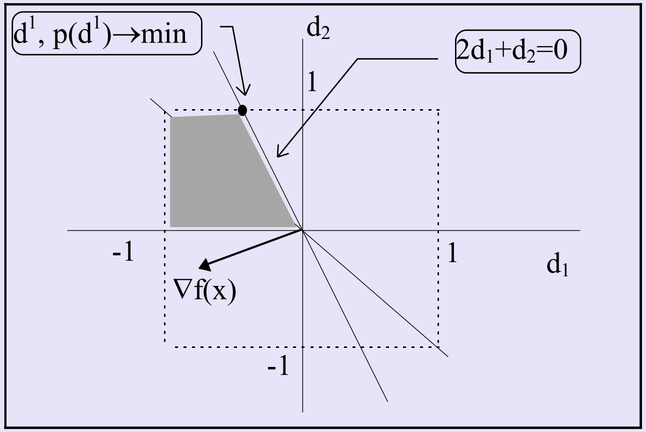
$$2d_1 + d_2 \leq 0$$

$$-d_2 \leq 0$$

$$d_1 \in \langle -1,1 \rangle,\ d_2 \in \langle -1,1 \rangle$$

Geometrická interpretácia riešenia úlohy je uvedená na obr.č.7.5.

Obr.č.7.5: Určenie vektora d^1



Metódy prípustných smerov

Optimálne riešenie úlohy sa realizuje v bode

$$\mathbf{d}^1 = (-1/2,\ 1)^T$$

a **hodnota účelovej funkcie** pomocnej úlohy v tomto bode je

$$\nabla f(\mathbf{x}^1)^T \mathbf{d} = -2 < 0$$

takže bod $\mathbf{x}^1$ nie je optimálnym riešením úlohy. Vektor $\mathbf{d}^1$ je potom prípustným progresívnym smerom v bode $\mathbf{x}^1$ a nasledujúci bod trajektórie má všeobecné vyjadrenie

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \lambda \mathbf{d}^1 = (2,0) + \lambda(-1/2,1) = (2-\lambda/2,\lambda).$$

b) určenie optimálnej dĺžky kroku λ

Vypočítajme $\mathbf{b}^0$, $\mathbf{d}^0$ podľa vzťahu (7.17). Dostávame

$$\mathbf{b}^0 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{A}_2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d}^0 = \mathbf{A}_2\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1\backslash 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Metódy prípustných smerov

- otimálnu dĺžku kroku určíme ako riešenie nasledovnej úlohy jednorozmernej minimalizácie pre premennú λ

$$f(\lambda) = f(2-\lambda/2,\lambda) = 5/4\lambda^2 - 2\lambda + 8 \rightarrow \min$$

$$0 \le \lambda \le \lambda_{max}$$

pričom hornú hranicu dĺžky kroku určíme na základe vzťahu (7.19) a dostávame

$$\lambda_{max} = \min\{8/5, 4\} = 8/5$$

- učme stacionárny bod funkcie $f(\lambda)$:

  - overme nutnú podmienku existencie extrému:

$$f'(\lambda) = 5/2\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda^o = 4/5$$

a vidíme, že stacionárny bod vyhovuje definovanému intervalu parametra λ

  - overme postačujúcu podmienku pre extrém typu minima v stacionárnom bode:

$$f''(\lambda) = 5/2 > 0,$$

takže funkcia je rýdzokonvexná a stacionárny bod je bodom jediného globálneho minima funkcie $f(\lambda)$.

Na základe optimálnej dĺžky kroku $\lambda^o = 4/5$ vypočítame súradnice nasledujúceho bodu x^2 a dostávame

$$x^2 = (2 - \lambda^o/2, \lambda^o) = (8/5, 4/5)^T$$

- položíme *k=k+1=2* a prejdeme na druhú iteráciu výpočtovej fázy algoritmu.

2.iterácia

a) určenie vektora prípustného progresívneho smeru

V bode $x^2=(8/5,4/5)$ má gradient účelovej funkcie súradnice $\nabla f(x^2)=(-24/5,-12/5)^T=(-2,-1)^T$ a množina aktívnych ohraničení pre bod x^2 zodpovedá 1. podmienke úlohy, t.j. I={1}. Matice A_1, A_2 majú nasledovné vyjadrenie

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a vektor prípustného progresívneho smeru nájdeme riešením nasledovnej úlohy lineárneho programovania

$$\nabla f(x^2)^T d = -2d_1 - d_2 \to \min$$

pri ohraničeniach

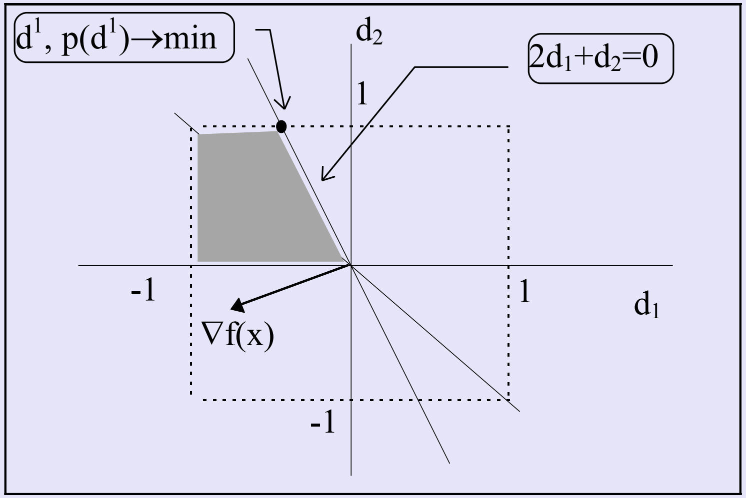
$$2d_1 + d_2 \leq 0$$

$$d_1 \in \langle -1,1 \rangle,\ d_2 \in \langle -1,1 \rangle$$

Metódy prípustných smerov

Geometrická interpretácia riešenia úlohy je uvedená na obr.č.7.6. Úloha má alternatívne optimálne riešenie, ktoré sa realizuje v dvoch krajných bodoch:

Obr.č.76: Určenie vektora d^2



$$\mathbf{d}^2=(-1/2,\ 1)^T,\ \ \mathbf{d}^{2'}=(0,\ 0)^T$$

Hodnota účelovej funkcie pomocnej úlohy v týchto bodoch je však rovná nule, t.j. platí

$$\nabla f(\mathbf{x}^2)^T \mathbf{d}^2 = \nabla f(\mathbf{x}^2)\mathbf{d}^{2'} = 0$$

takže bod

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{(8/5,\ 4/5)}^T$$

je optimálnym riešením úlohy, ktorému zodpovedá hodnota účelovej funkcie $f(\mathbf{x}^2)$ = 36/5.