Nelineárne optimalizačné modely a metódy

Téma prednášky č. 9

Kvadratické programovanie

príklad

Prof. Dr. Michal Fendek

Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Ekonomická univerzita Bratislava

Dolnozemská 1

852 35 Bratislava

Kvadratické programovanie

Príklad

Riešme úlohu kvadratického programovania

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 24x_2 \to \min$$

pri ohraničeniach

$$x_1 + x_2 \le 8$$

$$5x_1 - 2x_2 \le 9$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Riešenie:

a) Inicializačná fáza

Matice a vektory koeficientov úlohy sú nasledovné:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ p = \begin{pmatrix} -6 \\ -24 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Skonštruujme vektory **q**, **t** na základe vlastností vektorov **p**, **b**. Platí

$$p_1 < 0 \to q_1 = -1, \quad p_2 < 0 \to q_2 = -1$$

$$b_1 \ge 0 \to t_1 = 0, \quad b_2 \ge 0 \to t_2 = 0$$

Kvadratické programovanie

Podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera majú potom tvar:

$$
\begin{aligned}
-2x_1 + 2x_2 - u_1 - 5u_2 + v_1 \qquad\qquad - \mu &= -6 \\
2x_1 - 4x_2 - u_1 + 2u_2 \qquad + v_2 \qquad - \mu &= -24 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad + y_1 \qquad &= 8 \\
5x_1 - 2x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad + y_2 &= 9
\end{aligned}
$$

$$x_j v_j = 0,\ \ y_i u_i = 0,\ \ \text{pre } \forall i,j$$

$$x_j,\ v_j,\ y_i,\ u_i \geq 0,\ \ \text{pre } \forall i,j$$

Východiskovú tabuľku, ako aj výsledky výpočtov na ďalších štyroch iteráciách algoritmu uvádzame v tabuľke

Kvadratické programovanie

Tabuľka iterácií riešenia úlohy

x_B	x_1	x_2	u_1	u_2	v_1	v_2	y_1	y_2	μ	**p,b**
v_1	-2	2	-1	-5	1	0	0	0	-1	-6
¬v_2	2	-4	-1	2	0	1	0	0	-1*	-24
y_1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	8
y_2	5	-2	0	0	0	0	0	1	0↑	9
←v_1	-4	6*	0	-7	1	-1	0	0	0	18
μ	-2	4	1	-2	0	-1	0	0	1	24
y_1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	8
y_2	5	-2↑	0	0	0	0	0	1	0	9
x_2	-2/3	1	0	-7/6	1/6	-1/6	0	0	0	3
μ	2/3	0	1	8/3	-2/3	-1/3	0	0	1	12
←y_1	5/3*	0	0	7/6	-1/6	1/6	1	0	0	5
y_2	10/3↑	0	0	-7/3	1/3	-1/3	0	1	0	15
x_2	0	1	0	-7/10	1/10	-1/10	2/5	0	0	5
←μ	0	0	1*	11/5	-3/5	-2/5	-2/5	0	1	10
x_1	1	0	0	7/10	-1/10	1/10	3/5	0	0	3
y_2	0	0	0↑	-14/3	7/10	-7/10	-11/5	1	0	15
x_2	0	1	0	-7/10	1/10	-1/10	2/5	0	0	5
u_1	0	0	1	11/5	-3/5	-2/5	-2/5	0	1	10
x_1	1	0	0	7/10	-1/10	1/10	3/5	0	0	3
y_2	0	0	0	-14/3	7/10	-7/10	-11/5	1	0	4

Kvadratické programovanie

b) Výpočtová fáza

1.iterácia:

bázickou premennou sa stala premenná μ a nebázickou premennou premená v_2

2.iterácia:

bázickou premennou sa stala premenná x_2 (nahradila v_2) a nebázickou premená v_1

3.iterácia:

bázickou premennou sa stala premenná x_1 (nahradila v_1) a nebázickou premená y_1

4.iterácia:

bázickou premennou sa stala premenná u_1 (nahradila premennú y_1) a nebázickou premená m, to znamená, že algoritmus končí.

Optimálnym riešením úlohy je vektor

$$(x_1, x_2, u_1, u_2, v_1, v_2, y_1, y_2, \mu)^T = (3, 5, 10, 0, 0, 0, 0, 4, 0\ \ )$$

s optimálnou hodnotou účelovej funkcie

$$f(x) = -109$$