Nelineárne optimalizačné modely a metódy

Téma prednášky č. 5

Teória duality

Prof. Ing. Michal Fendek, CSc.

Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Ekonomická univerzita
Dolnozemská 1
852 35 Bratislava

Teória duality

Označme ako množinu $\overline{R^1}$ množinu všetkých reálnych čísel R^1 doplnenú o body $\{-\infty, +\infty\}$.

Nech na $R^n \times R^m$ je definovaná funkcia *G*, ktorá môže nadobúdať konečné, alebo nekonečné hodnoty:

$$G : R^m \times R^n \to \overline{R^1}$$

a nech $X \subset R^n$ a $U \subset R^m$.

Potom položme

$$f(x) = \sup_{u \in U} G(x,u)$$

$$\theta(u) = \inf_{x \in X} G(x,u)$$

a preskúmajme dve extremálne úlohy

$$P: \ \min\{ \ f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X \subset R^n \ \} \qquad\qquad D: \ \max\{ \ \theta(\mathbf{u}) | \mathbf{u} \in U \subset R^m \ \}$$

Úlohy *P,D* budeme nazývať *duálnymi* vzhľadom k funkcii *G*. Presnejšie, budeme hovoriť, že úloha *D* je duálna k úlohe *P* vzhľadom k funkcii *G*.

Teória duality

Poznámka

Infimum množiny. Infimom množiny S, označujeme *inf* $\{x \ / \ x \in S\}$, nazývame maximum z čísel α, pre ktoré platí $\alpha \leq x$ pre $\forall x \in S$.

Supremum množiny. Supremom množiny S, označujeme *sup* $\{x \ / \ x \in S\}$, nazývame minimum z čísel α, pre ktoré platí $\alpha \geq x$ pre $\forall x \in S$.

Príklad: Je daná množina

$$S = \{-2, 0, 11, 27, 103\}$$

$$\inf S = \max_{\alpha \in D} = -2 \qquad \alpha \leq \forall x \in S, \ \alpha \in D = \{\cdots, -1002, \ldots, -15, \ldots, -2\}$$

$$\sup S = \min_{\alpha \in D} x = 103 \qquad \alpha \geq \forall x \in S, \ \alpha \in D = \{103, \ldots, 1012, \ldots, 2500, \ldots\}$$

Duálna Lagrangeova úloha a jej geometrická interpretácia

Skúmajme *primárnu úlohu* nelineárneho programovania formulovanú v tvare

$$\boxed{f(\mathbf{x}) \to \min}$$

pri ohraničeniach

$$\boxed{\begin{array}{c} g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \ldots, l \\ \mathbf{x} \in X \end{array}}$$

Lagrangeova funkcia úlohy má tvar

$$\boxed{G(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v}) = L(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{l} v_k h_k(\mathbf{x})}$$

a *duálnu úlohu* D k *primárnej úlohu* P prostredníctvom *Lagrangeovej* funkcie $L(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v})$ formulujeme nasledovne:

$$\boxed{\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) \rightarrow \max}$$

pri ohraničeniach

$$\boxed{\mathbf{u} \geq \mathbf{0}}$$

kde duálna Lagrangeova funkcia úlohy $\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})$ má nasledovný tvar

$$\boxed{\theta(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v}) = \inf \left\{ f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{l} v_k h_k(\mathbf{x}) \;\middle|\; \mathbf{x} \in X \right\}}$$

Teória duality

V ďalšom texte budeme používať aj jednoduchšiu *vektorovú formu* zápisu dvojice duálnych úloh. Nech **g(x)** je vektorová funkcia so zložkami $g_i(\mathbf{x})$ pre $i=1,\dots,m$ a **h(x)** vektorová funkcia so zložkami $h_k(\mathbf{x})$ pre $k=1,\dots,l$. Primárnu úlohu potom zapíšeme v tvare

Úloha P: $$f(\mathbf{x})\ \rightarrow)\ \min 1$$

pri ohraničeniach

$$\mathrm{g}(\mathbf{x}) \le 0$$
$$\mathrm{h}(\mathbf{x}) = 0$$
$$\mathbf{x} \in X$$

a duálnu úlohu v tvare

Úloha D: $$\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) \rightarrow \mathrm{ma}$$

pri ohraničeniach

$$\mathbf{u} \ge \mathbf{0}$$

kde duálna Lagrangeova funkcia úlohy θ(**u,v**) má nasledovný tvar

$$\theta(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v}) = \inf\ \{\ f(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{h}(\mathbf{x})\ \middle|\ \mathbf{x} \in X$$

Príklad č.5.1

Skúmajme úlohu lineárneho programovania

Úloha P: $\min \{ f(x) = c^T x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0 \}$

Pri formulácii duálnej úlohy *D* uplatníme dva postupy:

- podmienka nezápornosti premenných $x \geq 0$ bude súčasťou definície množiny *X*;

- podmienka nezápornosti premenných $x \geq 0$ bude súčasťou sústavy ohraničení úlohy.

Riešenie

***Poznámka:* Duálna úloha má tvar:**

$\max \{ d(u) = u^T b \mid u^T A \geq c^T,\ u \geq 0 \}$

Teória duality

a) v prípade, že nezápornosť premenných je súčasťou definície množiny *X*, má *Lagrangeova funkcia* úlohy nasledovný tvar

$$L(x,u) = c^T x + u^T(b - Ax)$$

Formulujme duálnu úlohu

Úloha D $\max \{ \theta(u) \mid u \geq 0 \}$

kde

$$\theta(u) = \inf \{ c^T x + u^T(b - Ax) \mid x \geq 0 \} = \inf \{ c^T x + u^T b - u^T Ax \mid x \geq 0 \} =$$

$$= u^T b + \inf \{ (c^T - u^T A)x \mid x \geq 0 \}$$

a odtiaľ

$$\boxed{\theta(u) = \begin{cases} u^T b & ak \;\; c^T - u^T A \geq 0 \\ -\infty & ak \;\; c^T - u^T A < 0 \end{cases}}$$

takže úloha *D* má po tejto úprave nasledovný tvar

Úloha D $\max \{ u^T b \mid u^T A \leq c^T, u \geq 0 \}$

b) v prípade, že nezápornosť premenných je súčasťou sústavy ohraničení úlohy, má *Lagrangeova funkcia* úlohy nasledovný tvar

$$L(x,u,w) = c^T x + u^T(b - Ax) + w^T(-x)$$

Formulujme duálnu úlohu

Úloha D $\max \{ \theta(u,w) \mid u,w \geq 0 \}$

kde

$$\theta(u, w) = \inf \{ c^T x + u^T(b - Ax) + w^T(-x) \mid x \in R^n \} =$$

$$= u^T b + \inf \{ (c^T - u^T A - w^T)x \mid x \in R^n \}$$

a odtiaľ

$$\boxed{\theta(u,v) = \begin{cases} u^T b & ak \;\; c^T - u^T A - w^T = 0 \\ -\infty & ak \;\; c^T - u^T A - w^T \neq 0 \end{cases}}$$

takže úloha *D* má po tejto úprave nasledovný tvar

Úloha D $\max \{ u^T b \mid c^T - u^T A = w^T, u,w \geq 0 \}$, **resp.** $c^T - u^T A = w^T \geq 0$

$$\max \{ u^T b \mid c^T - u^T A \geq 0, u \geq 0 \} \;\; \text{q.e.d.}$$

Vidíme teda, že obidva spôsoby zohľadnenia nezápornosti premenných viedli v konečnom dôsledku k formulácii totožných duálnych úloh.

Geometrická interpretácia Lagrangeovej duálnej úlohy

Skúmajme geometrickú interpretáciu Lagrangeovej duálnej úlohy. Pre zjednodušenie uvažujme o úlohe s jedným ohraničením v tvare nerovnice. V tomto prípade má primárna úloha nasledovný tvar

Úloha P: $f(\mathbf{x}) \to min$

pri ohraničení

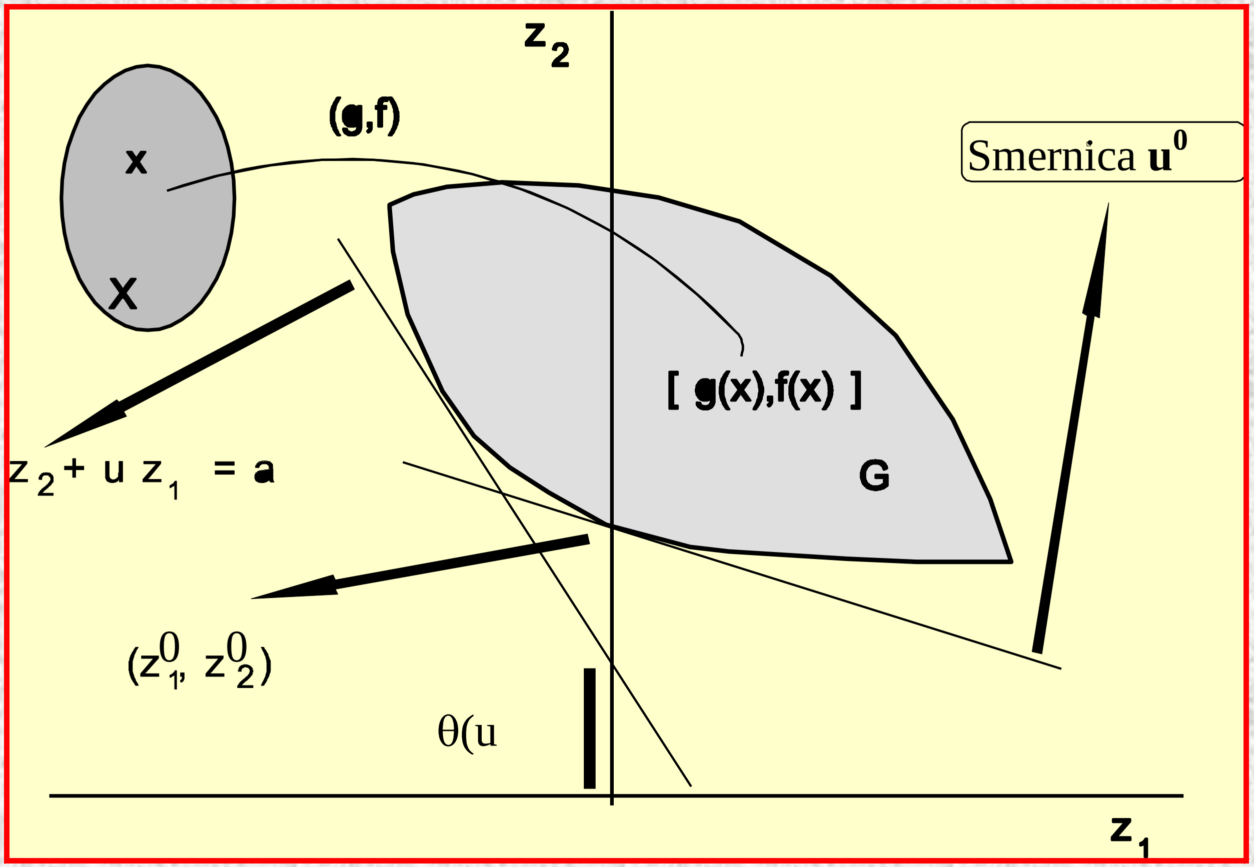
$$g(\mathbf{x}) \leq 0$$

$$\mathbf{x} \in X$$

Na obr.5.1 je v rovine (z_1, z_2) zobrazená množina

$$\mathbf{G = \{ (z_1, z_2) \;/\; z_1 = g(x),\, z_2 = f(x),\, x \in X \}}$$

Obr.č.5.1: Geometrická interpretácia duálnej Lagrangeovej úlohy



Vidíme, že množina *G* je obrazom množiny *X* pri zobrazení (g,f). Riešenie primárnej úlohy potom spočíva v nájdení takého bodu množiny *G* vľavo od osi z_2 (to znamená, že $g(x) \leq 0$), ktorého súradnica z_2 je minimálna (to znamená, že $f(x) \rightarrow min$). Na obrázku č.5.1 je takýmto bodom bod (z_1^o, z_2^o).

Predpokladajme teraz, že poznáme $u \geq 0$. Aby sme dokázali definovať $\theta(u)$, je potrebné nájsť infimum Lagrangeovej funkcie

$$\theta(u) = \inf \{\ f(x) + ug(x) \text{ pre } x \in X \}$$

Inými slovami, ak položíme

$$z_1 = g(x),\ z_2 = f(x),\ x \in X$$

tak pre určenie $\theta(u)$ je potrebné minimalizovať hodnotu výrazu

$$z_2 + uz_1$$

na množine *G*.

Poznamenajme, že

$$z_2 + uz_1 = a$$

$$z_2 = -\,uz_1 + a$$

je rovnica priamky so smernicou -*u*, ktorá pretína os z_2 v bode *(0,a)*.

- **Minimalizácia hodnoty výrazu $z_2 + uz_1$ na množine *G* spočíva v paralelnom posúvaní tejto priamky na množine *G* dovtedy, kým sa táto nestane dotykovou k množine *G*, pričom *G* leží nad priamkou.**

- **Potom, ako je to znázornené na obr. č.5.1, priesečník dotykovej priamky s osou z_2 definuje hodnotu duálnej Lagrangeovej funkcie.**

Riešenie duálnej úlohy

Úloha D: $\theta(u) \to max$

pri ohraničení

$$u \geq 0$$

potom spočíva v nájdení takého sklonu dotykovej nadroviny (priamky $z_2 + uz_2 = a$), pri ktorom je súradnica z_2 priesečníka tejto nadroviny s osou z_2 maximálna.

- **Ako vidíme z obrázku č.5.1, nadrovina s touto vlastnosťou má smernicu $-u^o$ a je dotykovou nadrovinou ku množine G v bode (z_1^o, z_2^o). To znamená, že optimálne riešenie duálnej úlohy je u^o a optimálna hodnota účelovej funkcie je z_2^o.**

- **Poznamenajme ešte, a čitateľ sa o tom môže ľahko sám presvedčiť, že optimálne hodnoty účelových funkcií úlohy P a úlohy D sú zhodné.**

Tieňové ceny a duálne riešenia v úlohách konvexného programovania

Preskúmajme vzťah medzi ***tieňovými*** ***cenami*** a ***optimálnymi riešeniami duálnej úlohy***, nakoľko nezriedka dochádza k ich myľnej interpretácii a vzájomnému zamieňaniu pojmov. Najprv budeme skúmať úlohy lineárneho programovania, ktoré sú frekventovaným objektom analýzy a ekonomickej interpretácie tieňových cien a potom rozšírime naše poznatky na všeobecnú úlohu konvexného programovania.

Uvažujme úlohu lineárneho programovania

$$max \{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \;/\; \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \}.$$

Zamerajme svoju pozornosť na definíciu a obsah pojmu *tieňová cena* p_i i-teho zdroja b_i. (L. Kantorovič). Tieňová cena p_i je obvykle interpretovaná ako miera zmeny (rastu, resp. poklesu) účelovej funkcie pri jednotkovej znene zdroja b_i.

V mnohých prípadoch sa k takejto definícii zároveň pridáva tvrdenie, že $p_i=u_i^o$, kde u_i^o je i-tá zložka optimálneho riešenia zodpovedajúcej duálnej úlohy. To však, ako ukážeme neskôr, vo všeobecnosti neplatí.

Príklad č.5.5 (Lineárny model optimalizácie výrobnej stratégie firmy maximalizujúcej zisk)

Preskúmajme úlohu lineárneho programovania

$$f(x) = 4x_1 + 5x_2 \to max$$

pri ohraničeniach

$$x_1 + x_2 \le 6 \qquad \text{(a)}$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 15 \qquad \text{(b)}$$

$$x_2 \le 3 \qquad \text{(c)}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

duálna úloha

Formulujme duálnu úlohu lineárneho programovania

$$d(u) = 6u_1 + 15u_2 + 3u_3 \rightarrow min$$

pri ohraničeniach

$$u_1 + 2u_2 \geq 4 \qquad \text{(a)}$$

$$u_1 + 3u_2 + u_3 \geq 5 \qquad \text{(b)}$$

$$u_1, u_{2\ 1}, u_3 \geq 0$$

Úlohu možno riešiť ľubovoľným štandardným algoritmom pre riešenie úloh lineárneho programovania. Dostaneme:

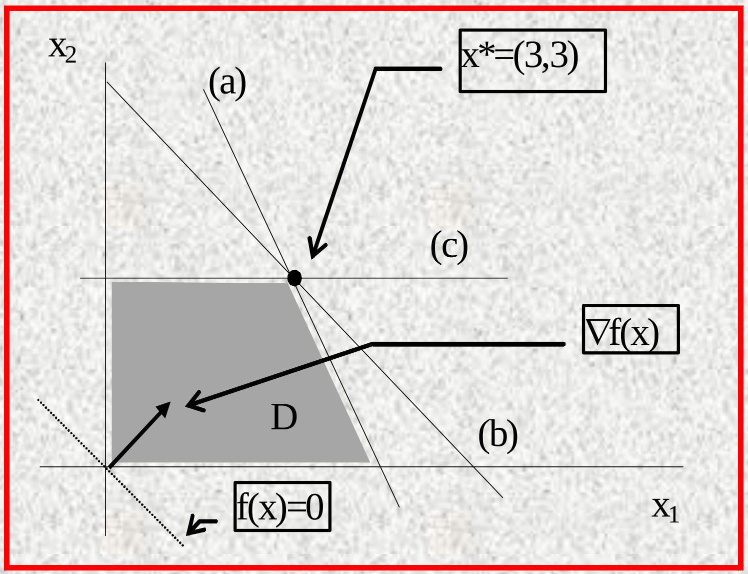
-optimálne riešenie primárnej úlohy $x^o = (3, 3, 0, 0, 0)^T$,

$f(x^o) = 27$,

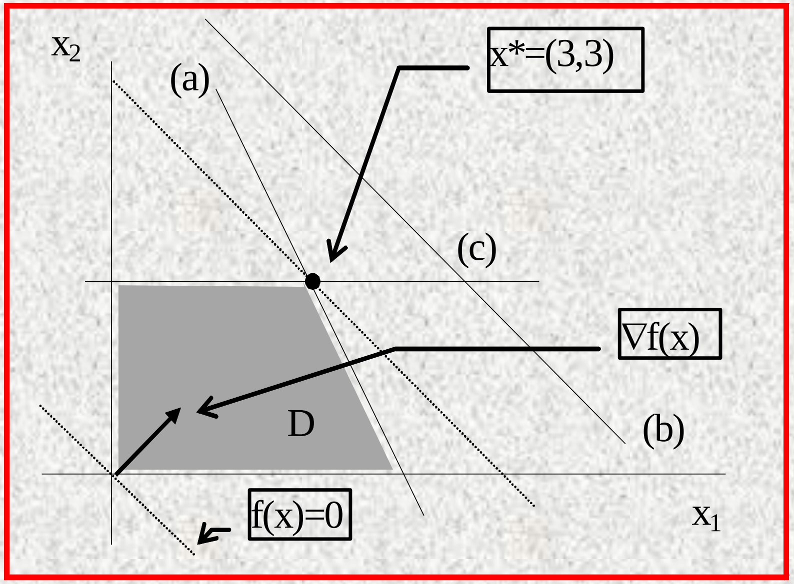
optimálne riešenie duálnej úlohy $u^{o1} = (2, 1, 0)^T$, $u^{o2} = (4, 0, 1)^T$,

$g(u^o) = 27$.

Obr.č.5.8: Geometrická interpretácia riešenia úlohy



Obr.č.5.9: Vplyv zmeny ohraničenia (b)



Záver 1:

Primárna úloha má degenerované optimálne riešenie prvého stupňa. Duálna úloha má *alternatívne optimálne riešenia*, taže jednoznačná korešpondencia medzi tieňovými cenami zdrojov a optimálnym duálnym riešením je tým vylúčená. Treba nájsť spôsob určenia jednoznačnej tieňovej ceny zdroja.

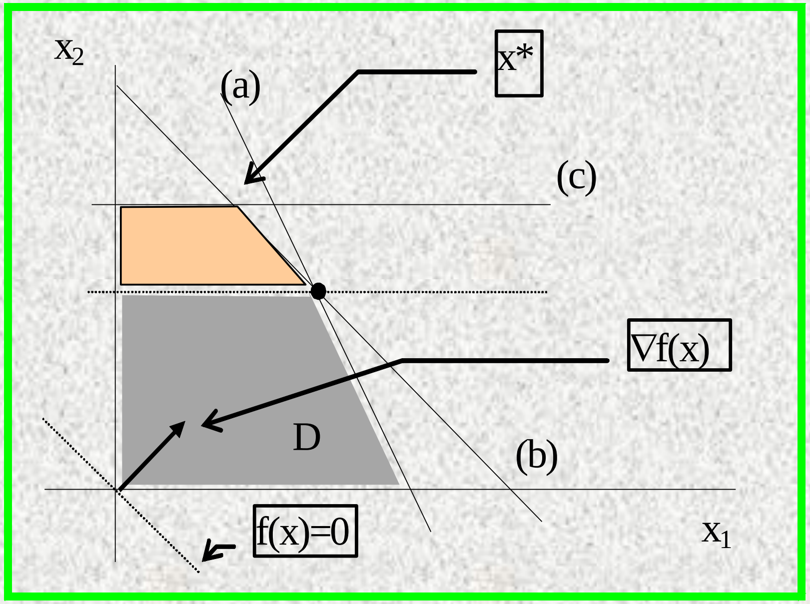
Záver 2:

Skúmajme, aké zmeny zisku môže firma očakávať pri jednotkovom poklese, resp. náraste disponibilnej zásoby i-teho zdroja.

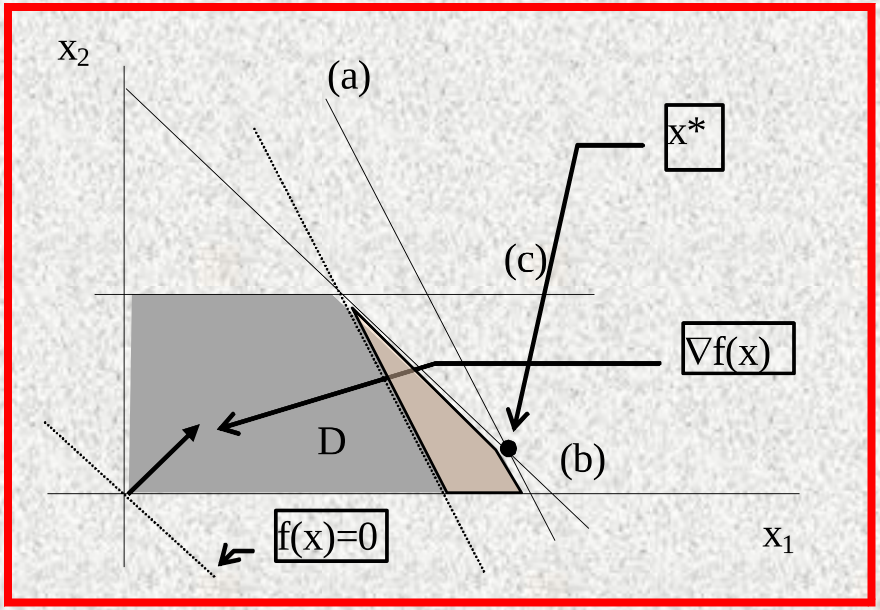
a) Zvýšenie zásoby druhého zdroja nemení množinu prípustných riešení a nemení sa preto ani optimálne riešenie úlohy a nedôjde teda ani k zvýšeniu hodnoty účelovej funkcie, takže zodpovedajúca tieňová cena druhého zdroja je nulová. Situácia je znázornená na obr.č.5.9.

Teória duality

Obr.č.5.10: Vplyv zmeny ohraničenia (c)



Obr.č.5.11: Vplyv zmeny ohraničenia (a)



b) Zvýšenie zásoby tretieho zdroja (pozri obr.č.5.10) síce modifikuje množinu prípustných riešení úlohy, optimálne riešenie úlohy sa však nezmení. Zodpovedajúca tieňová cena tretieho zdroja je nulová.

c) Zvýšenie zásoby prvého zdroja má za následok modifikáciu množiny prípustných riešení a zmenu optimálneho riešenia úlohy. Zvýšenie hodnoty účelovej funkcie možno potom vyjadriť nejakou zodpovedajúcou tieňovou cenou tohto zdroja (obr.č.5.11). Toto zvyšovanie však má svoje hranice. Po dosiahnutí priesečníka s osou x_1 v bode (15/2,0) už ďalšie zvyšovanie zásoby prvého zdroja je neúčinné. Barierou rastu sa stáva zásoba druhého zdroja.

d) Zníčenie zásoby ktoréhokočvek z troch sledovaných zdrojov má za následok modifikáciu množiny prípustných riešení a zmenu optimálneho riešenia úlohy. Zníženie hodnoty účelovej funkcie močno potom pre každý zdroj vyjadrič nejakou zodpovedajúcou tiečovou cenou tohto zdroja.

e) Vidíme teda, že prvý zdroj firmy môže mať nenulové a nie nutne rovnaké tieňové ceny rastu a poklesu jej zisku. Druhý a tretí zdroj majú nulové tieňové ceny rastu zisku a môžu mať nenulové tieňové ceny poklesú hodnoty účelovej funkcie.

definujme ***kladnú tieňovú cenu*** p_i^+ **i-teho zdroja ako parciálnu deriváciu sprava funkcie** ***v(b)*****, pričom platí**

$$p_i^+ = \lim_{\Delta b_i \to 0^+} \frac{v(b_i + \Delta b_i) - v(b_i)}{\Delta b_i} = \frac{\partial v(\mathbf{b})}{\partial b_i^+} = \min \left\{ u_i^0 \mid \mathbf{u^0} \in U(\mathbf{b}) \right\} \quad i = 1,\ldots,m \qquad \textbf{(5.9)}$$

a ***zápornú tieňovú cenu*** p_i^- **i-teho zdroja ako parciálnu deriváciu sprava funkcie** ***v(b)*****, pričom platí**

$$p_i^- = \lim_{\Delta b_i \to 0^-} \frac{v(b_i + \Delta b_i) - v(b_i)}{\Delta b_i} = \frac{\partial v(\mathbf{b})}{\partial b_i^-} = \max \left\{ u_i^0 \mid \mathbf{u^0} \in U(\mathbf{b}) \right\} \quad i = 1,\ldots,m \qquad \textbf{(5.10)}$$

Príklad č.5.6

Nájdime tieňové ceny výrobných faktorov firmy maximalizujúcej zisk z realizácie svojej produkcie z príkladu č.5.5.

Riešenie:

Formulujme duálnu úlohu v nasledujúcom tvare

$$d(u) = 6u_1 + 15u_2 + 3u_3 \to \min$$

pri ohraničeniach

$$u_1 + 2u_2 \geq 4$$

$$u_1 + 3u_2 + u_3 \geq 5$$

$$u_1, u_2, u_3 \geq 0$$

má konečný počet dvoch optimálnych duálnych riešení, takže množina *U(b)* je nasledovná

$$U(b) = \{ (2, 1, 0), (4, 0, 1) \}$$

Teória duality

Tieňové ceny jednotlivých zdrojov určíme na základe vzťahov (5.9) a (5.10) nasledovne

$p_1^+ = \min(2,4) = 2,\quad p_2^+ = \min(1,0) = 0,\quad p_3^+ = \min(0,1) = 0$

$p_1^- = \max(2,4) = 4,\quad p_2^- = \max(1,0) = 1,\quad p_3^- = \max(0,1) = 1$

- **Vidíme, že vypočítané hodnoty tieňových cien sú v súlade s výsledkami našich úvah o tieňových cenách jednotlivých zdrojov firmy, ktoré sme vyslovili pri analýze geometrickej interpretácie úlohy v príklade č.5.5.**

- **Prvý zdroj má kladnú a aj zápornú tieňovú cenu a ich hodnoty sú rôzne. Druhý a tretí zdroj majú nulové kladné tieňové ceny a nenulové záporné tieňové ceny.**