Nelineárne optimalizačné modely a metódy

Téma prednášky č. 4

Podmienky optimálnosti Kuhna – Tucdera

(Časť 1)

Prof. Ing. Michal Fendek, CSc.

Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Ekonomická univerzita
Dolnozemská 1
852 35 Bratislava

Podmienky optimálnosti v úlohe na voľný extrém

V optimalizačnej úlohe na voľný extrém minimalizujeme, alebo maximalizujeme funkciu *f(x)* bez akýchkoľvek ohraničujúcich podmienok kladených na rozhodovacie premenné. Skúmajme minimalizačnú úlohu

$$f(\mathbf{x}) \to \min, \qquad \mathbf{x} \in R^n \qquad \mathbf{(4.1)}$$

Nutné podmienky optimálnosti

Za predpokladu diferencovateľnosti funkcie *f*(x) môžeme formulovať na základe určitých vlastností gradientu funkcie v bode x^o, t.j vektora *prvých parciálnych derivácií* tzv. *nutné podmienky prvého rádu* a za predpokladu, že funkcia je *dvakrát diferencovateľná,* a teda existuje *Hessova matica druhých parciálnych derivácii* funkcie, môžeme formulovať tzv. *nutné podmienky druhého rádu*.

Veta 4.1

Nech funkcia $f{:}R^n \to R$ je diferencovateľná v bode x^o a existuje vektor $d \in R^n$ taký, že platí

$$\nabla f(x^o)^T d < 0$$

Potom $\exists \delta > 0$ také, že platí

$$f(x^o + \lambda d) < f(x^o), \quad \text{pre } \forall \lambda \in (0, \delta)$$

Inými slovami, vektor d predstavuje smer poklesu hodnoty účelovej funkcie *f* z bodu x^o, a preto bod x^o nemôže byť optimálnym riešením úlohy.

Nutné podmienky I. rádu

Nech funkcia $f:R^n \rightarrow R$ je diferencovateľná v bode x^o. Ak funkcia $f(x)$ má v bode x^o lokálne minimum, tak platí

$$\nabla f(x^o) = 0$$

Nutné podmienky II. rádu

Nech funkcia $f:R^n \rightarrow R$ je dvakrát diferencovateľná v bode x^o. Ak funkcia $f(x)$ má v bode x^o lokálne minimum, tak platí

$$\nabla f(x^o) = 0$$

a Hessova matica $H(x^o)$ je kladne semidefinitná.

Príklad č.4.1

Preverenie nutných podmienok optimálnosti v úlohe na voľný extrém budeme ilustrovať na nasledovnom príklade. Riešme úlohu

$$min\ \{\ f(x) = (x^2 - 1)^3 \mid x \in R^1\ \}$$

Riešenie

Geometrická interpretácia riešenia úlohy je uvedená na obr. č.4.1

a) Najprv určme *stacionárne body* funkcie, t.j. body v ktorých sú splnené nutné podmienky I. rádu

$$\nabla f(x) = 6x(x^2 - 1)^2 = 0$$

a odtiaľ

$$x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=1$$

b) Ďalej preverme platnosť nutných podmienok druhého rádu. Matica H(x) má rozmer (1,1), takže

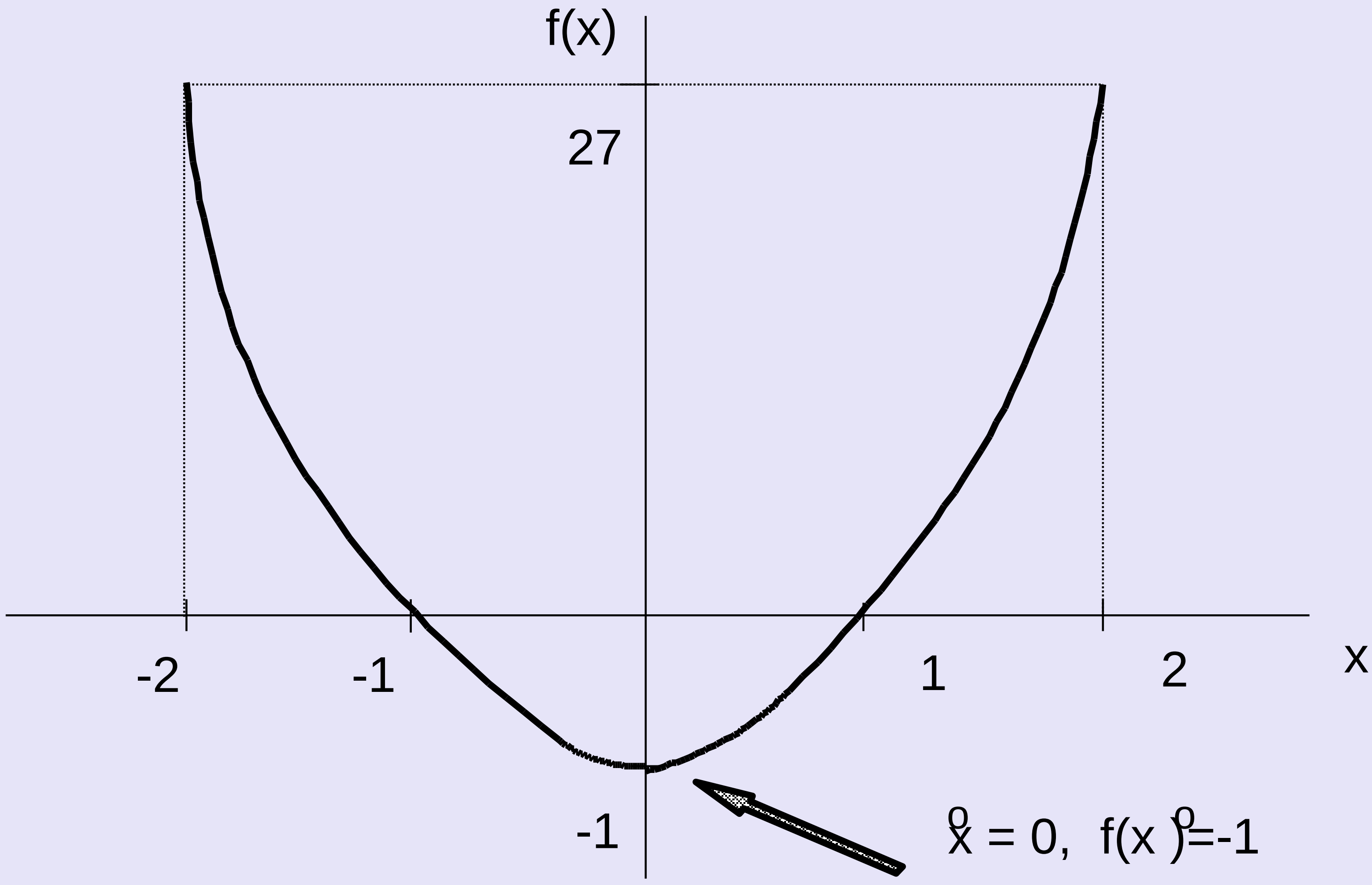
$$H(x)=24x^2(x^2-1)+6(x^2-1)$$

a pre jednotlivé stacionárne body platí

$$H(0)=6,\quad H(-1)=0,\quad H(1)=0$$

Matica je kladne semidefinitná pre všetky tri stacionárne body, ktoré takto vyhovujú nutným podmienkam optimálnosti 1. ale i 2. rádu. Splnenie týchto podmienok ale automaticky nezaručuje, že stacionárne body sú zároveň body lokálneho minima funkcie. Z obr. č.4.1 je napokon zrejmé, že funkcia má jediné globálne minimum, ktoré sa realizuje v bode $x^o=0$ s hodnotou funkcie $f(0)=-1$.

Podmienky optimálnosti



Postačujúce podmienky optimálnosti

- **Vidíme teda, že splnenie nutných podmienok optimálnosti nie je postačujúce, nakoľko súčasne nezaručuje, že bod x^o, ktorý týmto podmienkam vyhovuje, je bodom lokálneho minima úlohy. V nasledujúcej vete sformulujeme postačujúce podmienky optimálnosti.**

<u>Veta 4.3</u> (Postačujúce podmienky optimálnosti)

Nech funkcia $f: R^n \to R$ je dvakrát diferencovateľná v bode x^o. Ak platí

$$\nabla f(x^o) = 0$$

a Hessova matica $H(x^o)$ je v bode x^o kladne definitná, tak $f(x)$ má v bode x^o lokálne minimum.

<u>Poznámka 4.1</u>

Všimnime si, že v príklade č.4.1 je zo stacionárnych bodov $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=1$ príslušná Hessova matica kladne definitná len pre bod x_1, kde $H(0)=6$, a teda tento bod vyhovuje postačujúcej podmienke optimálnosti a je optimálnym riešením úlohy, čo sme napokon ukázali aj na obr.

Príklad

Skúmajme úlohu

$$\min \{ f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + e^{x_1 + x_2} \mid (x_1, x_2) \in R^2 \}$$

a) formulujte a preverte nutné podmienky 1. rádu a ukážte, že sú zároveň aj postačujúcimi podmienkami optimálnosti;

b) overte, či bod $x^T=(0, 0)$ je optimálnym riešením úlohy;

c) ak nie, tak určte vektor d, v ktorého smere pri prechode z bodu (0,0) hodnota funkcie najprudšie klesá.

Podmienky optimálnosti

a) Formulujme nutné podmienky 1. rádu

$$\nabla f(x_1,\ x_2) = (2x_1 - x_2 - 2 + e^{x_1+x_2},\ 4x_2 - x_1 + e^{x_1+x_2})^T = 0$$

Výpočet stacionárnych bodov je numerickým problémom riešenia príslušnej sústavy nelineárnych rovníc. Nás zaujíma, kedy sú nutné podmienky 1.rádu zároveň aj postačujúcimi podmienkami optimálnosti. Podľa vety 4.3 vtedy, ak príslušná Hessova matica je v extremálnom bode kladne definitná. Hessova matica funkcie má tvar

$$\mathrm{H}(x) = \begin{pmatrix} 2+e^{x_1+x_2} & -1+e^{x_1+x_2} \\ -1+e^{x_1+x_2} & 4+e^{x_1+x_2} \end{pmatrix}$$

Zaveďme substitúciu $y = e^{x_1+x_2}$ a po dosadení do vyjadrenia Hessovej matice a jej úprave na hornotrojuholníkový tvar dostávame

$$\mathrm{H}(x) = \begin{pmatrix} 2+y & -1+y \\ -1+y & 4+y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2+y & -1+y \\ 0 & 4+y-\dfrac{(y-1)^2}{2+y} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2+y & -1+y \\ 0 & \dfrac{8y+7}{2+y} \end{pmatrix}$$

Nakoľko y>0 pre "$(x_1,x_2) \in R^2$, tak prvky na hlavnej diagonále transformovanej matice H(**x**) sú kladné, takže matica H(**x**) je kladne definitná na celom obore definície funkcie a stacionárny bod funkcie je zároveň jej lokálnym minimom.

b) preverme platnosť nutných podmienok 1. rádu v bode (0,0).

$$\nabla f(0,\ 0) = (2x_1 - x_2 - 2 + e^{x_1+x_2},\ 4x_2 - x_1 + e^{x_1+x_2})^T = (-1,\ 1) \neq 0$$

Vidíme, že bod (0,0) nevyhovuje nutným podmienkam optimálnosti prvého rádu.

c) Vieme, že v bode (0, 0) hodnota funkcie najprudšie rastie pri pohybe z bodu v smere gradientu funkcie $\nabla f(0, 0)^T = (-1, 1)$. Najprudší pokles funkcie je naopak garantovaný v smere pohybu podľa antigradientu funkcie, ktorý je zároveň smerovým vektorom posunu a teda $\mathbf{d}^T = -\nabla f(0, 0)^T = (1, -1)$.

Podmienky optimálnosti v úlohe na viazaný extrém

Úlohy s ohraničeniami v tvare nerovníc

Skúmajme všeobecne formulovanú úlohu na viazný extrém

$$f(x) \to \min,\ x \in D$$

a) Geometrická interpretácia podmienok optimálnosti

• vektor prípustného smeru

Nech *D* je neprázdna množina v R^n a bod $x^o \in D$ je prípustným riešením úlohy NLP. *Kužeľom prípustných smerov* v bode x^o je množina

$$S = \{ d \in R^n \mid d \neq O,\ x^o + \lambda d \in D \text{ pre } \forall \lambda \in (0, \delta),\ \delta > 0 \}$$

a ľubovoľný vektor $d \in S$ budeme nazývať *vektorom prípustného smeru*.

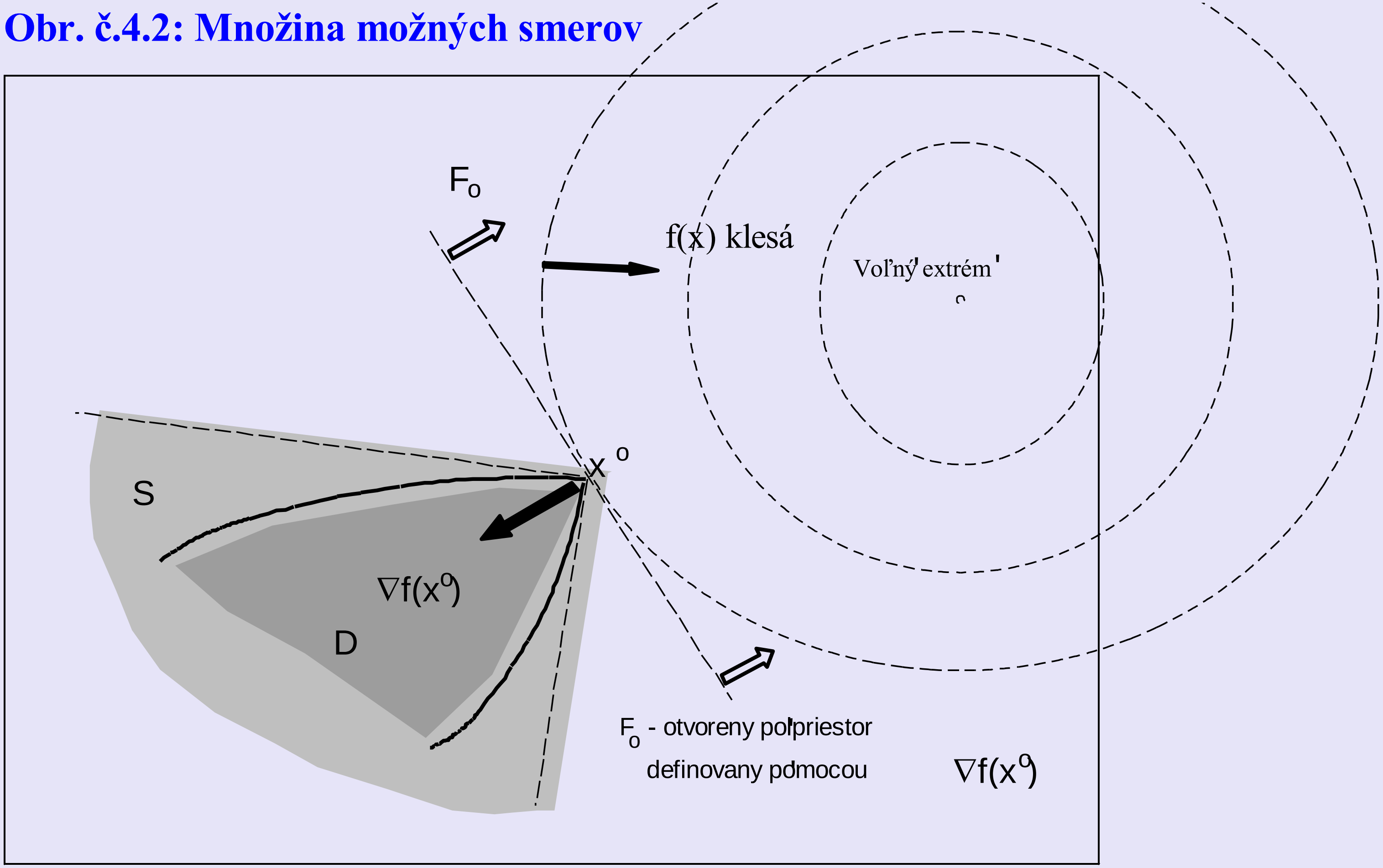
• vektor progresívneho smeru

Navyše, z vety 4.1 vyplýva, že ak

$$\nabla f(x^o)^T d < 0$$

tak vektor d je vektorom poklesu. t.j. *progresívnym smerom* a malý presun z bodu x^o v smere vektora d znižuje hodnotu účelovej funkcie *f(x)*.

Obr. č.4.2: Množina možných smerov



Veta 4.4

Skúmajme úlohu *min* $\{f(x) \mid x \in D\}$, kde $f : R^n \to R$, *D* je neprázdna množina v R^n a *f(x)* je diferencovateľná funkcia v určitom bode $x^o \in D$. Ak x^o je bodom lokálneho minima, tak potom platí

$$F^o \cap S = \varnothing$$

kde množinu $F^o = \{ d \mid \nabla f(x^o)^T d < 0 \}$ nazývame *množinou progresívnych smerov* a *S* je *množinou prípustných smerov* v bode x^o.

- **Konkretizujme teraz množinu prípustných riešení *D* úlohy (4.1) nasledovným spôsobom. Nech**

$$D = \{ x \in X \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m \}$$

kde *m* je počet ohraničení úlohy, $g_i : R^n \to R$ pre $i = 1,...,m$ a *X* je neprázdna otvorená množina v R^n. Potom úlohu (4.1) s ohraničeniami v tvare nerovníc preformulujeme nasledovne

$$f(x) \to \min$$

pri ohraničeniach $g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, ..., m$ **(4.3)**

$$x \in X$$

<u>Veta 4.5</u>

Skúmajme úlohu (4.3) a jej prípustné riešenie $\mathbf{x^o}$. Označme ako množinu aktívnych ohraničení množinu

$$I = \{\, i \mid g_i(\mathbf{x}) = 0 \,\}$$

Predpokladajme, že funkcie f, g_i, pre $\forall i \in I$ sú diferencovateľné v $\mathbf{x^o}$ a funkcie g_i, $\forall i \notin I$ sú spojité v $\mathbf{x^o}$. Ak $\mathbf{x^o}$ je bodom lokálneho optima, potom

$$F^o \cap G^o = \emptyset$$

kde

$$F^o = \{\, \mathbf{d} \mid \nabla f(\mathbf{x}^o)^T \mathbf{d} < 0 \,\}$$

$$G^o = \{\, \mathbf{d} \mid \nabla g_i(\mathbf{x}^o)^T \mathbf{d} < 0,\ i \in I \,\}$$

Príklad č.4.3

Preskúmajme úlohu

$$f(x_1,x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min$$

pri ohraničeniach

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Funkcie sústavy ohraničení úlohy sú nasledovné:

$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 5,$

$g_2(x) = x_1 + x_2 - 3,$

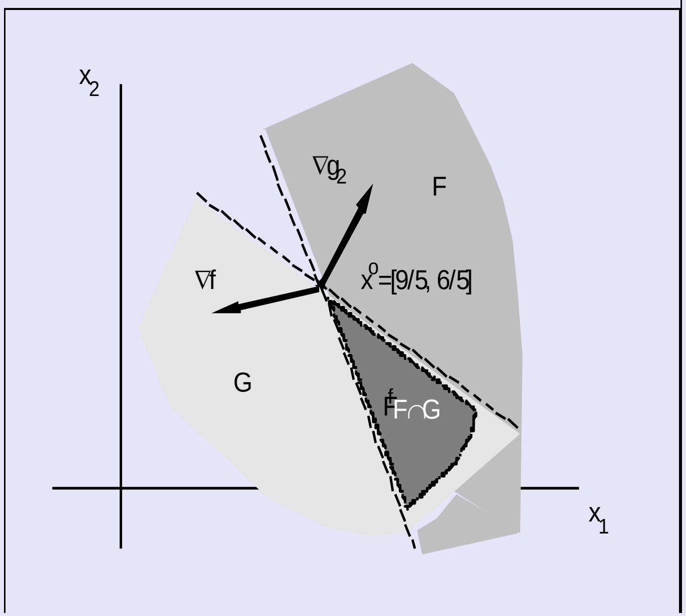
$g_3(x) = -x_1,$

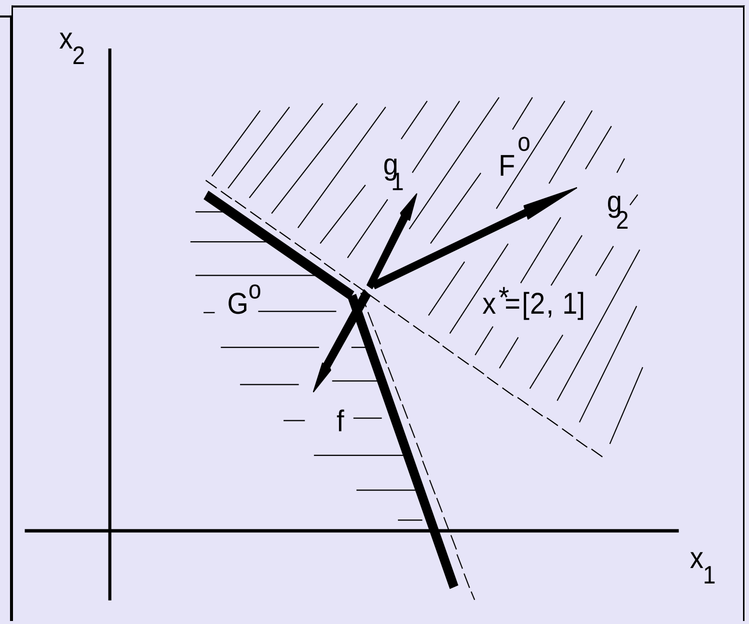
$g_4(x) = -x_2,$

$x \in R^2$

a) Preskúmajme bod $x^o=(9/5, 6/5)^T$.
b) Preskúmajme bod $x^*=(2,1)^T$.

Graf





Podmienky optimálnosti F.Johna

Preformulujme teraz nutné podmienky optimálnosti v geometrickej forme $F^o \cap G^o = \emptyset$ s využitím gradientov účelovej funkcie a funkcií sústavy ohraničení. Podmienky optimálnosti v tomto tvare formuloval v roku 1948 *Fritz John*.

Veta 4.6 (Podmienky optimálnosti F. Johna)

Nech X je neprázdna otvorená množina v R^n a $f : R^n \to R$, $g_i : R^n \to R$, $i = 1,\ldots,m$. Skúmajme úlohu

$$f(x) \to \min$$

pri ohraničeniach

$$g_i(x) \le 0, \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$x \in X$$

a jej prípustné riešenie x^o. Označme ako množinu aktívnych ohraničení I množinu

$$I = \{ i \mid g_i(x) = 0 \}$$

Predpokladajme, že funkcie $f(x)$, $g_i(x)$, $i \in I$ sú diferencovateľné v x^o a funkcie $g_i(x)$, $i \notin I$ sú spojité v x^o. Ak x^o je bodom lokálneho optima úlohy, potom existujú také čísla u_o, u_i, pre $i \in I$, pre ktoré platí

$$u_0 \nabla f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$$

$$u_0, u_i \ge 0, \qquad i \in I$$

$$(u_0, u_I) \ne (0,0)$$

kde vektor u_I má zložky u_i pre $i \in I$.

Ak sú navyše funkcie $g_i(x)$ diferencovateľné v bode x^o aj pre $i \notin I$, tak podmienky *F.Johna* možno zapísať v nasledovnej ekvivalentnej forme:

$$u_0 \nabla f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$$

$$u_i g_i(\mathbf{x}^0) = 0 \qquad \text{pre} \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$u_0, u_i \geq 0, \qquad \text{pre} \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$(u_0, u) \neq (0, \mathbf{0})$$

• Vysvetlime si, prečo sú tieto dve formulácie nutných podmienok F.Johna ekvivalentné. Čísla u_o, u_i, $i=1,...,m$ sa zvyčajne nazývajú *Lagrangeove multiplikátory*. Rovnosti $u_i\, g_i(x^o) = 0$ predstavujú tzv. *podmienky komplementárnej rovnováhy*.

Na základe týchto podmienok multiplikátor u_i môže byť kladný len pre ohraničenia, ktoré sú v bode x^o aktívne, to znamená $g_i(x^o) = 0$ a na druhej strane, ak ohraničenie nie je aktívne, t.j. $g_i(x^o) < 0$, tak zodpovedajúci multiplikátor musí byť nutne nulový, t.j. $u_i = 0$.

Podmienky *F.Johna* môžeme formulovať aj vo vektorovom tvare nasledovne

$$\boxed{\begin{gathered} u_0 \nabla f(\mathbf{x}^0) + \mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0} \\ (u_0, \mathbf{u}) \geq (0, \mathbf{0}) \\ (u_0, \mathbf{u}) \neq (0, \mathbf{0}) \end{gathered}}$$

kde

g(**x**) **-** vektor funkcií sústavy ohraničení so zložkami $g_i(\mathbf{x})$ pre i = 1,...,m;

G - matica typu (n,m) so stĺpcami $\nabla g_i(\mathbf{x}^o)$ pre i = 1,...,m;

u - vektor *Lagrangeovych multiplikátorov*, $\mathbf{u} \in R^m$.

Príklad č.4.4

Je daná úloha

$$f(x_1,x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min$$

pri ohraničeniach

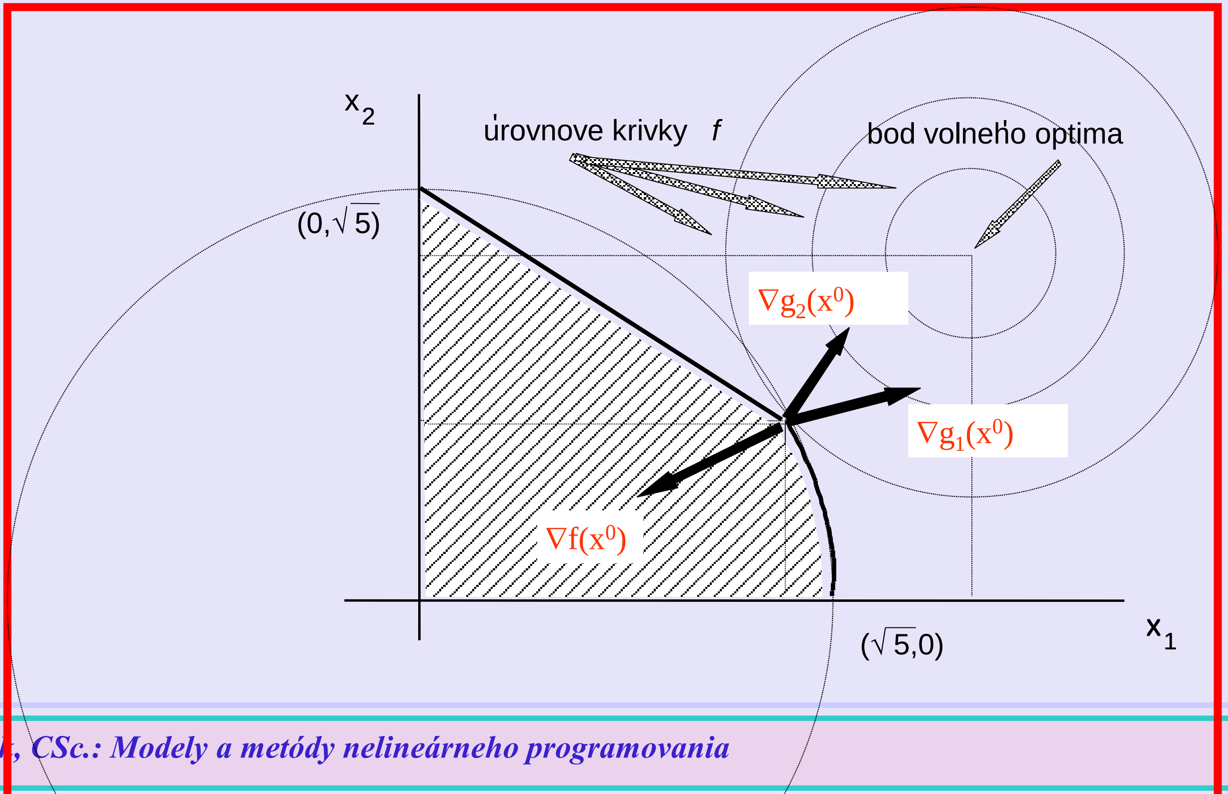
$$x_1^2 + x_2^2 \leq 5$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$-x_1 \leq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$

Preskúmajme platnosť nutných podmienok optimálnosti F.Johna v bodoch $x^1=(2,1)^T$, $x^2=(0,0)^T$



Podmienky optimálnosti

a) Preverme platnosť podmienok optimálnosti pre bod $x^1=(2,1)^T$, ktorý je, ako vidíme na obr. č.4.5 optimálnym riešením úlohy. Prvé a druhé ohraničenie je aktívne, to znamená *I={1,2}* Potom ale na základe komplementárnej podmienky rovováhy *F.Johna* vidíme, že *Lagrangeove multiplikátory* zodpovedajúce neaktívnym ohraničeniam, t.j. ohraničeniam $-x_1 \leq 0$, $-x_2 \leq 0$, sú nulové, a teda platí $u_3 = u_4 = 0$.

Vypočítajme hodnoty gradientov účelovej funkcie a funkcií aktívnych ohraničení

$$\nabla f(x^o)=(-2,-2)^T,$$

$$\nabla g_1(x^o)=(4,2)^T,$$

$$\nabla g_2(x^o)=(1,2)^T$$

Hodnoty multiplikátorov u_0, u_1, u_2, ktoré získame riešením sústavy rovníc zodpovedajúcich prvej podmienke *F.Johna*

$$u_0\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}+u_1\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+u_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

sú nasledovné

$$(u_0, u_1, u_2) = (3, 1, 2)^T \geq 0, \neq 0$$

Vidíme teda, že multiplikátory vyhovujú nutným podmienkam optimálnosti *F.Johna,* nakoľko majú nezáporné hodnoty.

Podmienky optimálnosti

Overme napokon platnosť podmienok *F.Johna* v bode x^2=(0, 0), ktorý evidentne nie je optimálnym riešením úlohy. Množina indexov aktívnych ohraničení I={3, 4}, a teda $u_1 = u_2 = 0$.

Hodnoty gradientov účelovej funkcie a funkcií aktívnych ohraničení sú nasledovné:

$$\nabla f(x^o)=(-6, -4)^T,\ \nabla g_3(x^o)=(-1, 0)^T,\ \nabla g_4(x^o)=(0, -1)^T$$

Hodnoty multiplikátorov u_0, u_3, u_4, ktoré získame riešením sústavy rovníc zodpovedajúcich prvej podmienke *F.Johna*

$$u_0\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix} + u_3\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + u_4\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

sú nasledovné

$$(u_0, u_3, u_4) = (u_0, -6u_0, -4u_0)$$

Ak $u_0 > 0$, potom u_3, u_4 < O, a teda multiplikátory nevyhovujú nutným podmienkam optimálnosti *F.Johna*, nakoľko nemajú nezáporné hodnoty. Ukázali sme teda, že bod x^2 nemôže byť optimálnym riešením úlohy.

Príklad č.4.5 (Kuhn-Tucker, 1951)

Skúmajme nasledovnú ulohu nelineárneho programovania

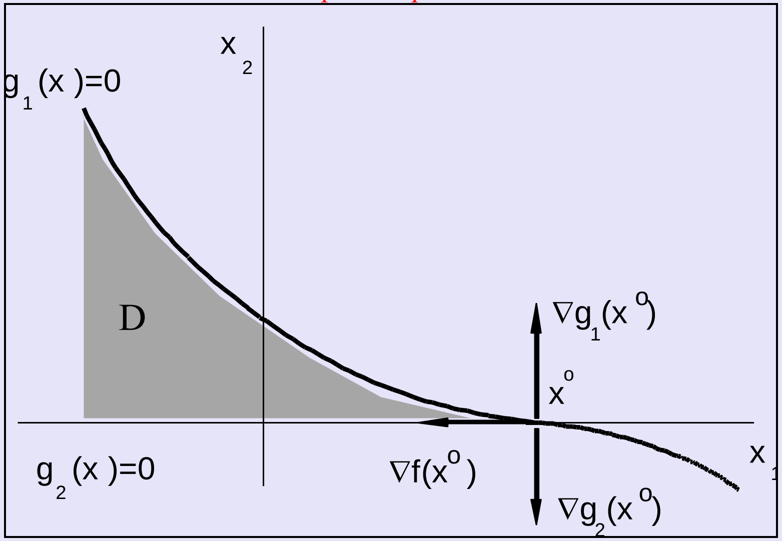
$$f(x_1) = -x_1 \rightarrow \min$$

pri ohraničeniach

$$-(1 - x_1)^3 + x_2 \leq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$

Obr.č.4.6: Geometrická interepretácia príkladu č.4.5



Podmienky optimálnosti

- Optimálne riešenie sa evidentne realizuje v bode $\mathbf{x^o}=(1,0)^T$ a v tomto bode sú aktívne obidve ohraničenia úlohy, takže $I=\{1,2\}$. Hodnoty gradientov účelovej funkcie a funkcií aktívnych ohraničení sú nasledovné:

$$\nabla f(\mathbf{x^o})=(-1,0)^T,$$

$$\nabla g_1(\mathbf{x^o})=(-3(1-x_1)^2,1)^T=(0,1)^T,$$

$$\nabla g_2(\mathbf{x^o})=(0,-1)^T$$

- Hodnoty multiplikátorov u_0, u_1, u_2 získame riešením sústavy rovníc zodpovedajúcich prvej podmienke *F.Johna*

$$u_0\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + u_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + u_2\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

odtiaľ

$$u_o = 0$$

$$u_1 = u_2 = t > 0$$

Nakoľko

$$(u_0, u_1, u_2) = (0, t, t), t>0$$

tak Lagrangeove multiplikátory v bode x^o vyhovujú nutným podmienkam optimálnosti *F.Johna*.

Príklad č.4.5 (Kuhn-Tucker, 1951) – Kontrapríklad

Skúmajme nasledovnú ulohu nelineárneho programovania

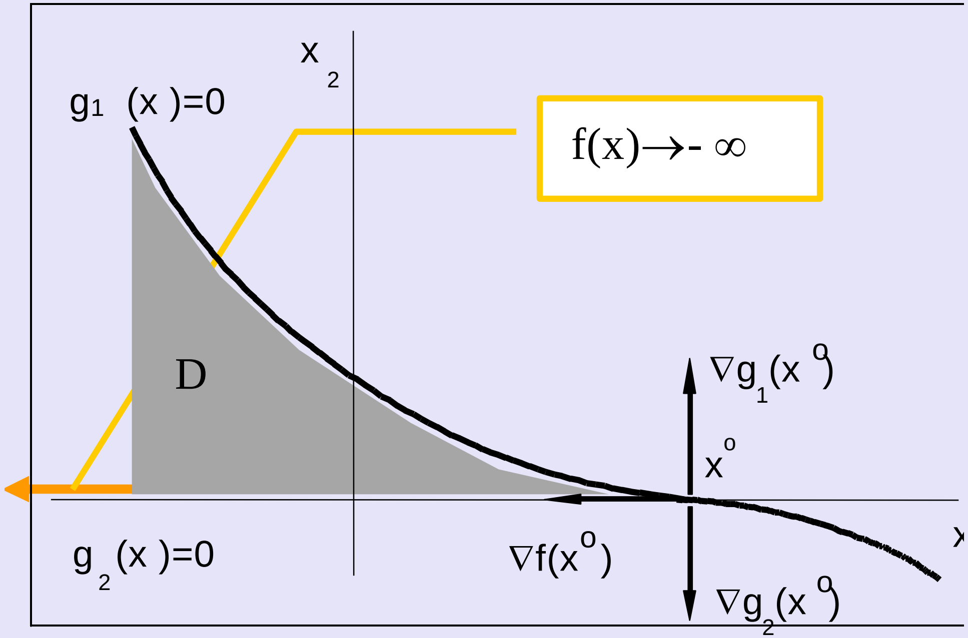
$$f(x_1) = x_1 \to \min$$

pri ohraničeniach

$$-(1 - x_1)^3 + x_2 \leq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$

Obr.č.4.6: Geometrická interepretácia príkladu č.4.5



Podmienky optimálnosti

• Hodnota účelovej funkcie v tejto úlohe je evidentne zdola neohraničená. Preskúmajme napriek tomuy bod $\mathbf{x}^{\mathbf{o}}=(1,0)^T$. V tomto bode sú aktívne obidve ohraničenia úlohy, takže $I=\{1,2\}$. Hodnoty gradientov účelovej funkcie a funkcií aktívnych ohraničení sú nasledovné:

$$\nabla f(\mathbf{x}^{\mathbf{o}})=(1,0)^T,$$

$$\nabla g_1(\mathbf{x}^{\mathbf{o}})=(-3(1-x_1)^2,1)^T=(0,1)^T,$$

$$\nabla g_2(\mathbf{x}^{\mathbf{o}})=(0,-1)^T$$

• Hodnoty multiplikátorov u_0, u_1, u_2 získame riešením sústavy rovníc zodpovedajúcich prvej podmienke *F.Johna*

$$u_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+u_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+u_2\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

odtiaľ

$$u_o=0$$

$$u_1=u_2=t>0$$

Dostávame

$$(u_0, u_1, u_2) = (0, t, t),\ t>0$$

takže Lagrangeove multiplikátory v bode x^o vyhovujú nutným podmienkam optimálnosti *F.Johna*.

TENTO BOD VŠAK NIE JE OPTIMÁLNYM RIEŠENÍM LOHY

Podmienky optimálnosti

• **Vidíme teda, že v niektorých prípadoch podmienky optimálnosti F.Johna zlyhávajú. Zaujímavejší z hľadiska riešenia úloh je teda prípad, keď $u_o \neq 0$. *Kuhn, H.W.* a *Tucker, A.W.* sformulovali analogické podmienky optimálnosti ako *F.John*, ale s dodatočnou vlastnosťou kladnej hodnoty multiplikátora u_o, a to $u_o = 1$. Ďalej formulované podmienky sa v odbornej literatúre obvykle uvádzajú ako *Kuhnove-Tuckerove podmienky optimálnosti.***

Podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera (Nutné podmienky optimálnosti *Kuhna-Tuckera*)

Nech X je neprázdna otvorená množina v R^n a $f:R^n \to R$, $g_i:R^n \to R$, $i=1,\dots,m$. Skúmajme úlohu

$$f(\mathbf{x}) \to \min$$

pri ohraničeniach $$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \qquad i=1, \dots, m$$

$$\mathbf{x} \in X$$

a jej prípustné riešenie $\mathbf{x}^0$. Označme ako množinu I

$$I = \{ i \mid g_i(\mathbf{x}) = 0 \}$$

aktívnych ohraničení. Predpokladajme, že funkcie $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$, $i \in I$ sú diferencovateľné v $\mathbf{x}^0$ a funkcie $g_i(\mathbf{x})$, $i \notin I$ sú spojité v $\mathbf{x}^0$. Nech vektory $\nabla g_i(\mathbf{x})$, pre $i \in I$ sú navyše lineárne nezávislé. Ak $\mathbf{x}^0$ je bodom lokálneho optima úlohy, potom existujú také čísla u_i, pre $i \in I$, pre ktoré platí

$$\boxed{\begin{array}{c} \nabla f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0} \\ u_i \geq 0, \qquad i \in I \end{array}}$$