Nelineárne optimalizačné modely a metódy

Téma prednášky č. 2

Vlastnosti riešenia úlohy nelineárneho programovania

(Časť 1)

Prof. Ing. Michal Fendek, CSc.

Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Ekonomická univerzita
Dolnozemská 1
852 35 Bratislava

2.1 Všeobecná formulácia úlohy nelineárneho programovania

Optimalizačnú úlohu formulovanú v tvare

$$\boxed{f(\mathbf{x}) \rightarrow \min} \tag{2.1}$$

pri ohraničeniach

$$\boxed{g_i(\mathbf{x}) \le 0 \qquad i = 1,2,\ldots,m} \tag{2.2}$$

kde $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$ pre i = 1,2,.., m sú reálne funkcie n premenných, z ktorých aspoň jedna nie je lineárna nazývame úlohou ***nelineárneho programovania***,

pričom

n - počet rozhodovacích premenných;

m - počet ohraničení úlohy;

$\mathbf{x}$ - vektor rozhodovacích premenných $\mathbf{x} = (x_j)$, $j = 1,2,\ldots,n$;

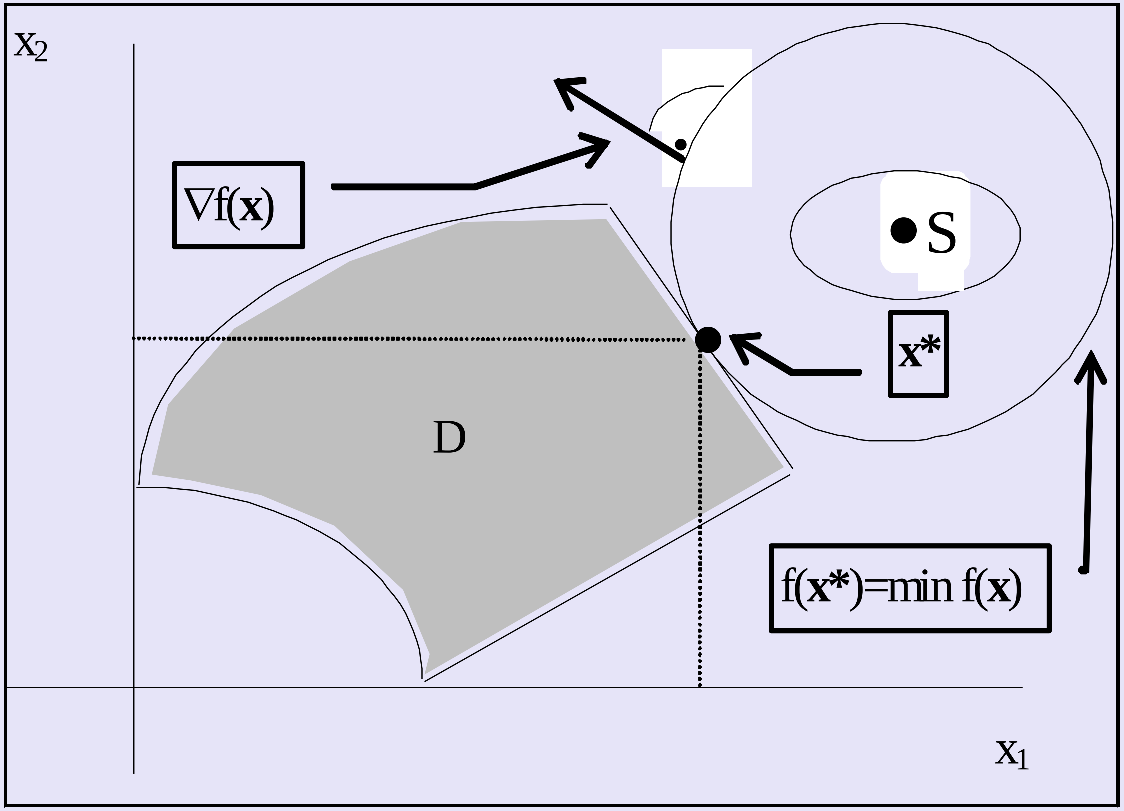
$f(\mathbf{x})$ - účelová funkcia $f(\mathbf{x}) : \mathrm{R}^n \rightarrow \mathrm{R}$;

$g_i(\mathbf{x})$ - i-tá funkcia sústavy ohraničení pre $i = 1,2,\ldots,m$, $g_i(\mathbf{x}) : \mathrm{R}^n \rightarrow \mathrm{R}$;

R^n - množina n-rozmerných vektorov reálnych čísel;

R - množina reálnych čísel.

Geometrická interpretácia úlohy NP



Vlastnosti riešenia úlohy nelineárneho programovania

Definícia 2.1

Množinu D, pre prvky ktorej platí

$$D = \{ x \mid g_i(x) \le 0,\ i = 1,2,\dots,m \}$$

nazývame ***množinou prípustných riešení*** úlohy nelineárneho programovania (2.1), (2.2).

Definícia 2.2

Vektor $\mathbf{x}$, ktorý vyhovuje podmienkam (2.2) úlohy nelineárneho programovania (2.1), (2.2) nazývame ***prípustným riešením*** úlohy, t.j. $\mathbf{x} \in D$.

Definícia 2.3

Vektor $\mathbf{x}^* \in D$, pre ktorý platí

$$f(x^*) \le f(x) \qquad \text{pre } \forall\, x \in D$$

a ktorý teda minimalizuje hodnotu účelovej funkcie na množine prípustných riešení D nazývame ***optimálnym riešením*** úlohy nelineárneho programovania (2.1), (2.2).

Poznámka 2.1

V prípade, že účelová funkcia $f(x)$ je maximalizačná, transformujeme úlohu (2.1), (2.2) na úlohu s účelovou funkciou

$$f^{o}(x) = -f(x)$$

pre ktorú platí

$$\max f(x) = -\min\,[-f(x)] = -\min f^{o}(x)$$

Vlastnosti riešenia úlohy nelineárneho programovania

Na štandardný tvar upraviť akýkoľvek typ ohraničení úlohy nelineárneho programovania. Ukážeme jednoduchý spôsob úpravy ako ohraničenia typu "=", tak i ohraničenia typu "≥" na štandardný tvar.

a) V prípade ohraničenia v neštandardnom tvare

$$\boxed{g_i(\mathrm{x}) \geq 0}$$

vynásobíme ohraničenie číslom (-1) a dostávame

$$-\ g_i(\mathrm{x}) \leq 0$$

b) V prípade ohraničenia v neštandardnom tvare

$$g_i(\mathrm{x}) = 0$$

nahradíme toto ohraničenie v tvare rovnice dvomi ohraničeniami v tvare nerovníc s opačným typom ohraničenia a dostávame

$$g_i(\mathrm{x}) \leq 0$$
$$g_i(\mathrm{x}) \geq 0$$

Tento prístup má, samozrejme, tú nevýhodu, že zvyšuje počet ohraničení v úlohe.

2.1.1 Štruktúra sústavy ohraničení v úlohe nelineárneho programovania

Z hľadiska tvaru ohraničujúcich podmienok klasifikujeme úlohy nelineárneho programovania nasledovne. (Poznamenávame, že ohraničenia, ktoré sa líšia iba typom nerovnice nepovažujeme za rôzne.)

1. Všetky ohraničujúce podmienky úlohy sú v tvare rovníc

$$g_i(\mathrm{x}) = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

Sústava ohraničení v tvare rovníc je typická pre klasické extremalizačné úlohy a pre ich riešenie existujú efektívne analytické prostriedky.

2. Všetky ohraničujúce podmienky úlohy sú v tvare nerovníc

$$g_i(\mathrm{x}) \leq 0 \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

Sústava ohraničení v tvare nerovníc je vhodná pre teoretické úvahy o podmienkach optimálnosti a geometrické interpretácie analýzy vlastností množiny prípustných riešení úlohy (dotykové nadroviny, vnútorné a vonkajšie body množiny prípustných riešení a podobne).

3. Ohraničujúce podmienky úlohy sú v tvare nerovníc a vo formulácii úlohy sú explicitne uvedené podmienky nezápornosti premenných

$$g_i(\mathrm{x}) \leq 0 \qquad i = 1,2,\ldots,m$$
$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

Tento tvar sústavy ohraničení korešponduje s mnohými reálnymi ekonomickými modelmi, v ktorých je logickou požiadavkou nezápornosť rozhodovacích premenných.

5. Ohraničujúce podmienky úlohy sú v tvare nerovníc a rovníc

$$\begin{aligned} g_i(\mathrm{x}) &\le 0 \qquad i = 1,2\ldots,m \\ h_k(\mathrm{x}) &= 0 \qquad k = 1,2\ldots,l \end{aligned}$$

Táto formulácia sústavy ohraničení, ktorá je použitá v 1.kapitole v úlohe (1.1)-(1.3), je vhodná najmä pre výklad teórie opierejúcej sa o geometrické úvahy, napr. výklad podmienok optimálnosti *Kuhna-Tuckera*. V niektorých prácach sa táto formulácia prezentuje ako všeobecná formulácia úlohy nelineárneho programovania.

6. Ohraničujúce podmienky úlohy sú v tvare nerovníc a rovníc a vo formulácii úlohy sú explicitne uvedené podmienky nezápornosti premenných

$$\begin{aligned} g_i(\mathrm{x}) &\le 0 \qquad i = 1,2,\ldots,m \\ h_k(\mathrm{x}) &= 0 \qquad k = 1,2,\ldots,l \\ x_j &\ge 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n \end{aligned}$$

Táto formulácia sústavy ohraničení sa využíva prevažne v profesionálnych programových systémov pre riešenie úloh nelineárneho programovania, napr. v systéme ***GAMS***, nie je však vhodná pre teoretické úvahy, nakoľko treba samostatne analyzovať jednotlivé typy ohraničujúcich podmienok.

Nasledovnú úlohu nelineárneho programovania upravte na základe prv uvedených pravidiel na štandardný tvar (2.1), (2.2).

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 - 25x_1 + x_2^2 - 25x_2 \rightarrow max$$

pri ohraničeniach

$$-x_1 + 2x_2 = 4$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 9$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 8x_2 \leq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Riešenie:

a) účelovú fukcie prenásobíme číslom (-1);

b) prvé ohraničenie nahradíme dvomi nerovnicami opačného typu, t.j. ohraničením typu "≤", resp. ohraničením typu "≥" a druhé z nich prenásobíme číslom (-1);

c) pôvodné druhé ohraničenie úlohy prenásobíme číslom (-1);

d) podmienku nezápornosti premennej x_2 prenásobíme číslom (-1)

Po transformácii získame úlohu v štandardnom tvare:

$$f(x_1,x_2) = -x_1^2 + 25x_1 - x_2^2 + 25x_2 \rightarrow min$$

pri ohraničeniach

$$g_1(x_1,x_2) = -x_1 + 2x_2 - 4 \le 0$$

$$g_2(x_1,x_2) = x_1 - 2x_2 + 4 \le 0$$

$$g_3(x_1,x_2) = -2x_1 - 3x_2 + 9 \le 0$$

$$g_4(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_2 \le 0$$

$$g_5(x_1,x_2) = -x_2 \le 0$$

2.1.2 Klasifikácia úloh nelineárneho programovania

V súlade s vlastnosťami účelovej funkcie *f(x)* a funkcií sústavy ohraničení $g_i(x)$ možno úlohy matematického programovania klasifikovať podľa viacerých kritérií.

***a) Z hľadiska praktického riešenia úloh nelineárneho programovania* je významná klasifikácia úloh na základe vlastností funkcií sústavy ohraničení za predpokladu nelineárnosti účelovej funkcie nasledovne:**

a1) *úlohy s lineárnymi ohraničeniami*, v ktorých sú všetky funkcie $g_i(x)$ pre $i = 1, 2, \ldots, m$ lineárne,

a2) *úlohy s nelineárnymi ohraničeniami*, v ktorých je aspoň jedna z funkcií $g_i(x)$ pre $i = 1, 2, \ldots, m$ nelineárna.

Poznámka 2.3

Analogická klasifikácia z hľadiska vlastností účelovej funkcie nie je potrebná, pretože každú úlohu s nelineárnou účelovou funkciou môžeme upraviť na úlohu s lineárnou účelovou funkciou nasledovne.

Úloha nelineárneho programovania

$$f(\mathrm{x}) \to \min$$

pri ohraničeniach

$$g_i(\mathrm{x}) \leq 0 \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

je ekvivalenntná s úlohou

$$\psi(x^0) = x^0 \to \min$$

pri ohraničeniach

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(\mathrm{x}) - x^o \leq 0 & \\ g_i(\mathrm{x}) \leq 0 & i = 1,2,\ldots,m \end{array}}$$

Vlastnosti riešenia úlohy nelineárneho programovania

b) Z hľadiska vlastnosti konvexnosti funkcií úlohy **klasifikujeme úlohy nelineárneho programovania nasledovne:**

b1) *konvexné úlohy*, v ktorých účelová funkcia $f(x)$ a funkcie sústavy ohraničení $g_i(x)$ pre $i = 1, 2, ..., m$ sú konvexné.

• Poznamenávame, že lineárne funkcie sú konvexné, a preto úloha lineárneho programovania je špeciálnym prípadom úlohy konvexného programovania.

• Ak v úlohe existuje ohraničenie v tvare rovnice

$$g_i(x) = 0$$

nahradíme toto ohraničenie dvomi ohraničeniami v tvare nerovníc s opačným typom ohraničenia nasledovne

$$g_i(x) \leq 0$$
$$-\ g_i(x) \leq 0$$

Keďže funkcia $g_i(x)$, aj funkcia $-\ g_i(x)$ musia byť konvexné, tak funkcia $g_i(x)$ musí byť konvexná aj konkávna zároveň, a teda funkcie vystupujúce v ohraničeniach úlohy ako rovnice, musia byť lineárne.

• Konvexné programovanie predstavuje najlepšie rozpracovanú časť nelineárneho programovania.

b2) *nekonvexné úlohy*, v ktorých aspoň jedna z funkcií $f(x)$, resp. $g_i(x)$ pre i=1, 2 ,..., m nie je konvexná, resp. aspoň jedna z funkcií vystupujúcich v sústave ohraničení v tvare rovníc nie je lineárna.

c) Okrem prv uvedenej klasifikácie úloh nelineárneho programovania možno kategorizovať triedy úloh nelineárnho programovania špeciálnej štruktúry, a to ako z hľadiska formulácií úloh a vlastností ich riešenia, tak i z hľadiska oblastí ich ekonomických aplikácií:

c1) úlohy *kvadratického programovania*, v ktorých účelová funkcia je kvadratická a konvexná a funkcie sústavy ohraničení sú lineárne:

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_i\, x_j + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \rightarrow \min$$

pri ohraničeniach

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \leq b_k \qquad k = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

kde a_{kj}, c_{ij}, p_j, b_k $\in \mathrm{R}$ **pre** $\forall$ $i,j = 1, 2, ..., n$, $k = 1,2, ,..., m$.

Vlastnosti riešenia úlohy nelineárneho programovania

c2) úlohy ***separovateľného programovania***, ktoré sú formulované v tvare úlohy (2.1), (2.2) a v ktorých všetky funkcie sú aditívnymi funkciami funkcií jednej premennej a majú nasledovný tvar

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j); \qquad g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \qquad i=1,2,\ldots,m$$

c3) úlohy ***zlomkového programovania***, v ktorých účelová funkcia je podielom dvoch lineárnych funkcií a funkcie sústavy ohraničení sú lineárne:

$$f(\mathrm{x}) = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \alpha}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \beta}$$

pri ohraničeniach

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i = 1,2,\ldots,m$$
$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

kde $a_{ij}, c_j, p_j, b_i, d_j, a, \beta \in$ R pre $\forall j = 1, 2, ..., n,\ i = 1,2, ,..., m$.

c4) úlohy ***geometrického programovania***, v ktorých všetky funkcie majú tvar zovšeobecnených kladných polynómov

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{p=1}^{q} c_p x_1^{a_{p1}} \cdot x_2^{a_{p2}} \ldots x_n^{a_{pn}}$$

kde $c_p \in R$, $c_p \ge 0$, $a_{pj} \in R$ pre $p = 1, 2, ..., q,\ j = 1, 2 ,..., n$.

Geometrická interpretácia riešenia úlohy nelineárneho programovania

Príklad

Je daná úloha nelineárneho programovania v nasledovnom tvare

$$f(x_1,x_2) = 10(x_1 - 3.5)^2 + 20(x_2 - 4)^2 \to \min$$

pri ohraničeniach

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$

$$-0.5x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Úloha:

a) upravte úlohu na štandardný tvar (2.1), (2.2),

b) úlohu riešte graficky.

Riešenie:

a)

$$f(x_1,x_2) = 10(x_1 - 3.5)^2 + 20(x_2 - 4)^2 \to \min$$

pri ohraničeniach

$$g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 6 \leq 0$$

$$g_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2 - 1 \leq 0$$

$$g_3(x_1, x_2) = -2x_1 - x_2 + 6 \leq 0$$

$$g_4(x_1, x_2) = -0.5x_1 + x_2 - 4 \leq 0$$

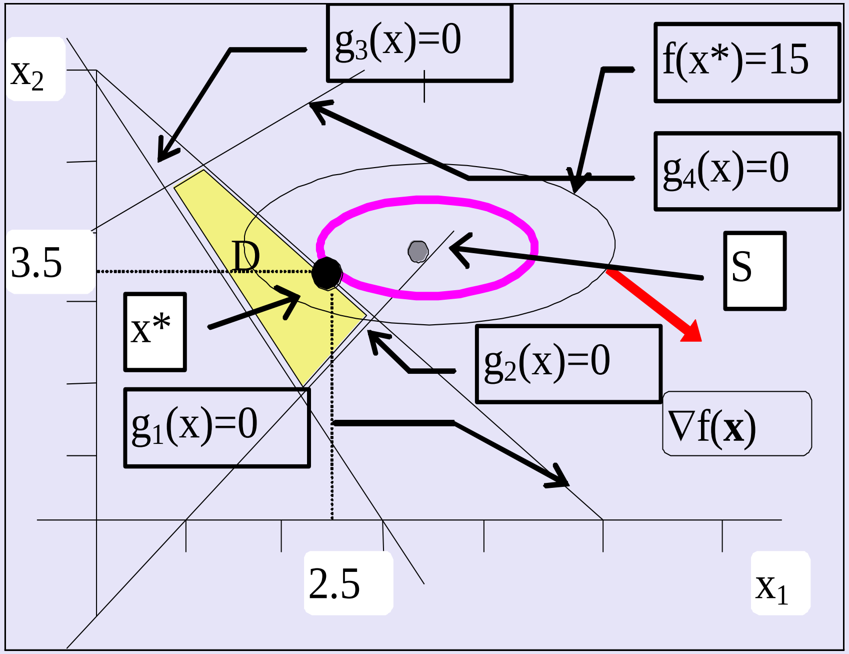
$$g_5(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0$$

$$g_6(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0$$

Vlastnosti riešenia úlohy nelineárneho programovania

• Geometrická interpretácia riešenia úlohy je uvedená na obr. Grafom účelovej funkcie je ***plocha v trojrozmenrnom priestore [x_1, x_2, $f(x_1, x_2)$].***

Obr. Optimálne riešenie vo vnútornom bode množiny prípustných riešení



• **Túto plochu sa nebudeme snažiť zobraziť v trojrozmernom priestore, ale pri hľadaní minima funkcie $f(x_1,x_2)$ využijeme zobrazenie jej úrovčových kriviek $f(x_1,x_2)=f_i$.**

• **Na obr. sú okrem množiny prípustných riešení *D* zobrazené aj dve úrovňové krivky funkcie $f(x_1,x_2)$, ktoré predstavujú *kocentrické elipsy* so stredom v bode *S=(3.5,4)*.**

Voľný extrém funkcie sa realizuje v bode *S* a pre hodnotu funkcie platí $f(x_1,x_2) = 0$. Keďže hodnoty funkcie rastú v smere jej gradientu

$$\nabla f(x_1,x_2) = (20(x_1 - 3.5),\ 40(x_2 - 4))^T$$

a klesajú v smere jej antigradientu $-\nabla f(x_1,x_2)$, tak optimálne riešenie x^* sa dosahuje v dotykovom bode množiny prípustných riešení *D* a úrovňovej krivky $f(x^*)$. Týmto bodom je bod dotyku elipsy s úrovňovou krivkou

$$10(x_1 - 3{,}5)^2 + 20(x_2 - 4)^2 = f$$

a priamky

$$x_1 + x_2 = 6$$

Analytické určenie súradníc optimálneho riešenia úlohy x^* spočíva v riešení nasledovnej sústavy dvoch rovníc, a to kvadratickej a lineárnej rovnice s dvomi neznámymi x_1, x_2 a parametrom f

$$10(x_1 - 3{,}5)^2 + 20(x_2 - 4)^2 = f$$

$$x_1 + x_2 = 6$$

Po vyjadrení neznámej x_2 na základe premenej x_1 z druhej rovnice a po následnom dosadení do prvej rovnice a po úprave dostávame

$$10(x_1 - 3.5)^2 + 20(6 - x_1 - 4)^2 = f$$

resp.

$$30x_1^2 - 150x_1 + 202.5 - f = 0$$

Keďže hľadáme taký bod x^*, v ktorom sa elipsa dotýka priamky, tak hľadáme riešenie kvadratickej rovnice pre takú hodnotu parametra f, pre ktorú je diskriminant rovný nule, t.j.

$$22500 - 4\times 30\times(202.5 - f) = 0$$

a odtiaľ

$$f = 15$$

a po spätnom vyjadrení

$$\boxed{x^* = (x_1^*, x_2^*) = (2.5, 3.5), \qquad f(x^*) = 15}$$

• Vidíme, že optimálne riešenie $x^* = (2.5, 3.5)$ *nie je krajným bodom* množiny prípustných riešení D.

• Preto pri riešení takejto úlohy nemôžeme použiť žiadnu metódu založenú na nejakom postupnom skúmaní krajných bodov množiny prípustných riešení *D*, ako je to v prípade úloh lineárneho programovania a adekvátnych algoritmoch simplexovej metódy.

• Navyše, v podobných úlohách nelineárneho programovania optimálne riešenie nemusí byť ani *krajným bodom* množiny prípustných riešení ani *hraničným bodom* množiny prípustných riešení.

• Môže byť například v netorným bodom množiny prípustných riešení. Takúto situáciu budeme ilustrovať na nasledovnom príklade.

Skúmajme predchádzajúcu úlohu. Na množine prípustných riešení *D* nájdime bod $x^* = (x_1, x_2)$, v ktorom sa minimalizuje hodnota nasledovnej účelovej funkcie

$$f(x_1,x_2) = 10(x_1 - 3)^2 + 20(x_2 - 2.5)^2 \to \min$$

Riešenie:

Voľný extrém funkcie sa realizuje v bode, ktorý je vnútorným bodom množiny prípustných riešení *D*, takže je zároveň aj optimálnym riešením úlohy. Týmto bodom je stred kocentrických elíps

$$10(x_1 - 3)^2 + 20(x_2 - 2.5)^2 = f$$

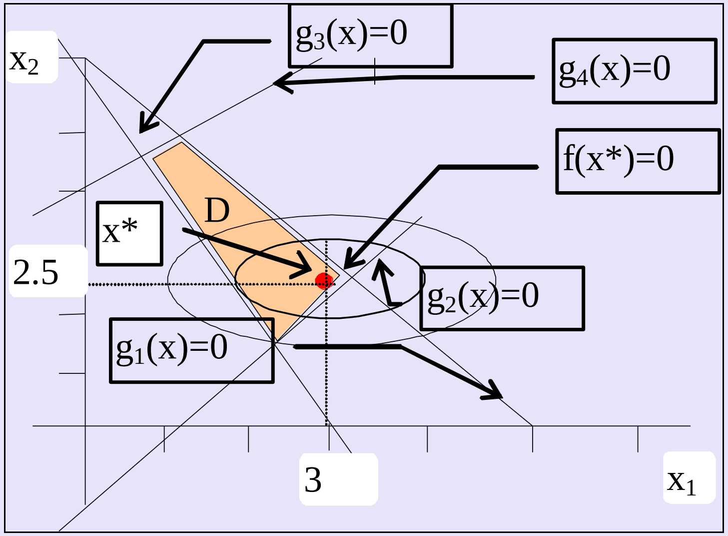
t.j. bod

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = (3, 2.5)$$

v ktorom účelová funkcia dosahuje minimálnu hodnotu

$$f(x_1^*,x_2^*) = 0$$

Obr.: Optimálne riešenie vo vnútornom bode množiny prípustných riešení



V skúmaných úlohách má účelová funkcia $f(x_1,x_2)$ na konvexnej polyedrálnej množine prípustných riešení *D* svoj extrém v jedinom extremálnom bode, bode *lokálneho minima.* Tento bod je súčasne aj bodom *globálneho minima.*

<u>Definícia 2.4</u>

Je daný bod $x \in R^n$ a číslo $\varepsilon \in R^+$, kde R^+ je množina kladných reálnych čísel. Množinu

$$N_\varepsilon(x) = \{y \mid |x - y| \le \varepsilon\}$$

nazývame *ε- okolím bodu* x.

<u>Definícia 2.5</u>

Nech $f(x)$ je funkcia definovaná na podmnožine *S* euklidovského priestoru R^n, t.j. $S \subset R^n$. Potom

a) hovoríme, že funkcia $f(x)$ nadobúda v bode $x^o \in S$ *lokálne maximum*, resp. *lokálne minimum* vzhľadom na množinu *S*, ak existuje také okolie $N_\varepsilon x^o)$ bodu x^o, že pre

$$\forall\ x \in N_\varepsilon(x^o) \cap S$$

platí

$$f(x^o) \ge f(x), \quad \text{resp.} \quad f(x^o) \le f(x)$$

Bod x^o potom nazývame bodom lokálneho maxima, resp. bodom lokálneho minima funkcie $f(x)$ na množine *S*.

Vlastnosti riešenia úlohy nelineárneho programovania

b) hovoríme, že funkcia $f(\mathrm{x})$ nadobúda v bode $\mathrm{x}^{o} \in S$ *ostré lokálne maximum*, resp. *ostré lokálne minimum* vzhľadom na množinu S, ak existuje také okolie $N_{\varepsilon}(\mathrm{x}^{o})$ bodu x^{o}, že pre

$$\forall\ \mathrm{x} \in N_{\varepsilon}(\mathrm{x}^{o}) \cap S, \text{ pričom } \mathrm{x} \neq \mathrm{x}^{o}$$

platí

$$f(\mathrm{x}^{o}) > f(\mathrm{x}), \quad \text{resp.} \quad f(\mathrm{x}^{o}) < f(\mathrm{x})$$

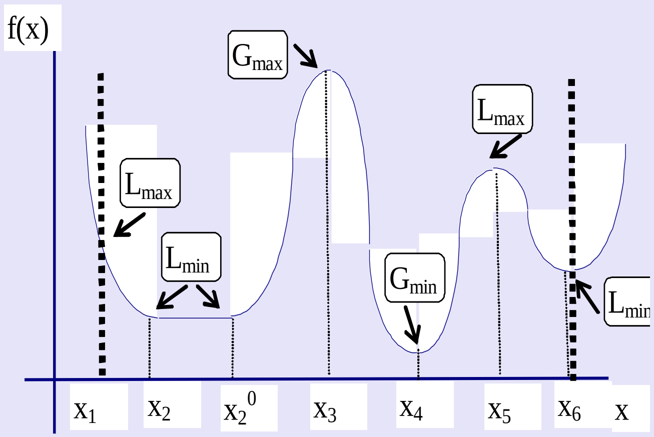
Bod x^{o} potom nazývame bodom ostrého lokálneho maxima, resp. bodom ostrého lokálneho minima funkcie $f(x)$ na množine S.

c) Hovoríme, že funkcia $f(\mathrm{x})$ nadobúda v bode $\mathrm{x}^{o} \in S$ *globálne maximum*, resp. *globálne minimum* vzhľadom na množinu S, ak $\forall\ \mathrm{x} \in S$ platí

$$f(\mathrm{x}^{o}) \geq f(\mathrm{x}), \quad \text{resp.} \quad f(\mathrm{x}^{o}) \leq f(\mathrm{x})$$

Bod x^{o} potom nazývame bodom globálneho maxima, resp. bodom globálneho minima funkcie $f(x)$ na množine S.

Obr. Lokálne a globálne extrémy funkcie f(x)



• Ďalším zdrojom ťažkostí, ktoré vznikajú pri riešení úloh nelineárneho programovania, je skutočnosť, že účelová funkcia zďaleka nie vždy má na množine prípustných riešení *D* len jediný extremálny bod.

•V takýchto prípadoch sa v úlohách musíme vysporiadať s novým problémom - ako spomedzi bodov, v ktorých sa dosahuje lokálny extrém vybrať bod, prípadne body, v ktorých sa dosahuje globálny extrém. Úlohy, v ktorých nie každý lokálny extrém je súčasne aj globálnym extrémom úlohy sa nazývajú *viacextremálnymi*.

Príklad

Preskúmajte množinu prípustných riešení a nájdite extrémy nasledovnej úlohy nelineárneho programovania

$$f(x_1,x_2) = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \max$$

pri ohraničeniach

$$g_1(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 + 2 \le 0$$

$$g_2(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 - 2 \le 0$$

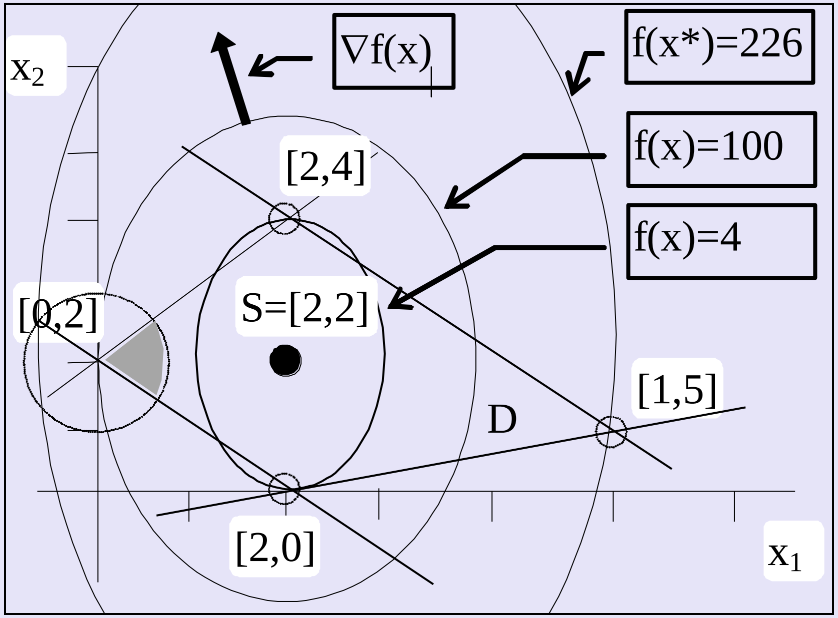
$$g_3(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 6 \le 0$$

$$g_4(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 - 2 \le 0$$

$$g_5(x_1, x_2) = -x_1 \le 0$$

$$g_6(x_1, x_2) = -x_2 \le 0$$

Obr.č.2.4: *Viacextremálna optimalizačná úloha*



Ako vidieť z obr. jedným zo 4 bodov lokálneho maxima účelovej funkcie na množine *D* je bod (5,1), v ktorom účelová funkcia dosahuje hodnotu

$$f(5,1) = 226 > f(0,2) = 100 > f(2,0) = f(2,4) = 4,$$

a keďže účelová funkcia úž nemá na množine *D* žiadne ďalšie extremálne body, tak bod **x**=(5,1) je bodom <u>*globálneho maxima*</u> účelovej funkcie na množine *D*, a teda aj <u>*optimálnym riešením*</u> úlohy.

Vlastnosti riešenia úlohy nelineárneho programovania

- **Doposiaľ sme sa pri prezentovaných geometrických interpretáciách riešenia úloh nelineárneho programovania zamerali na popísanie ťažkostí, ktoré vznikajú pri riešení týchto úloh v súvislosti s nelineárnosťou účelovej funkcie úlohy.**

- **V ďalšom príklade sa zameriame na ilustráciu ťažkostí, ktoré sú dôsledkom toho, že funkcie v sústave ohraničení sú nelineárne, a teda množina prípustných riešení úlohy vo všeobecnosti nemusí byť konvexná.**

Príklad

Nájdime optimálne riešenie úlohy nelineárneho programovania v nasledovnom tvare

$$f(x_1,x_2) = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

pri ohraničeniach

$$g_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2 - 2 \leq 0$$

$$g_2(x_1, x_2) = x_2 - 3 \leq 0$$

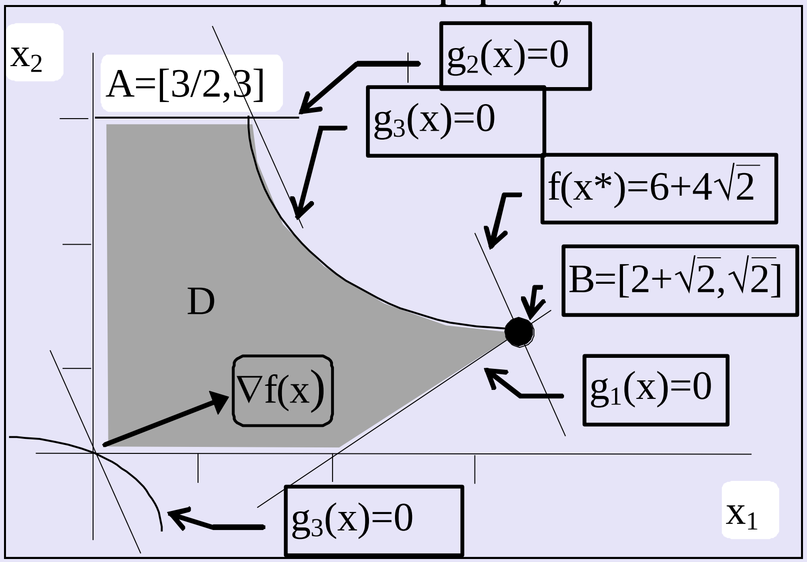
$$g_3(x_1, x_2) = - x_1 + (x_1 - 1)x_2 \leq 0$$

$$g_5(x_1, x_2) = - x_1 \leq 0$$

$$g_6(x_1, x_2) = - x_2 \leq 0$$

Vlastnosti riešenia úlohy nelineárneho programovania

Obr.č.2.5: Nekonvexná množina prípustných riešení



Všimnime si, že ohraničenie definované nelineárnou fukciou $g_3(x_1,x_2)$ ohraničuje časť roviny, ktorá sa nachádza medzi vetvami hyperboly $x_2 = \dfrac{x_1}{x_1 - 1}$

Lineárna účelová funkcia úlohy má na nekonvexnej množine prípustných riešení *D* dva body lokálneho maxima, a to:

$$A = (3/2,3), \quad B = (2+\sqrt{2},\sqrt{2})$$ **B**

pričom lokálne maximá majú hodnoty $f(3/2,3) = 15/2, \quad f(2+\sqrt{2},\sqrt{2}) = 6 + 4\sqrt{2}$ **C**

takže gobálne maximum, t.j. optimálne riešenie sa realizuje v bode *B*.

Pri identifikáciu riešenia extremalizačnej úlohy na voľný extrém vychádzame z nasledujúceho poznatku.

Ak funkcia $f(x_1,...,x_n)$ definovaná na kompaktnej množine $D \subset R^n$ má na tejto prípustnej oblasti extrém, t.j. maximum, alebo minimum, tak sa tento extrém dosahuje v jednom, alebo v niekoľkých bodoch, ktoré patria do jednej z nasledovných množín

a) množina stacionárnych bodov Y;

b) množina hraničných bodov prípustnej oblasti;

c) množina bodov, v ktorých funkcia nie je diferencovateľná.

Definícia 2.6

Množina Y sa nazýva množinou stacionárnych bodov diferencovateľnej funkcie *f(x), ak pre* $\forall x \in Y$ platí

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0 \qquad pre\ \forall\ j = 1,\dots,n$$

Veta 2.2 (Nutná podmienka existencie extrému)

Nech reálna funkcia $f(x_1,...,x_n)$ je diferencovateľná na množine $D \in R^n$. Ak v niektorom vnútornom bode $x^o \in int\ D$ tejto množiny má funkcia lokálny extrém, t.j. maximum, alebo minimum, potom pre prvé parciálne derivácie funkcie platí

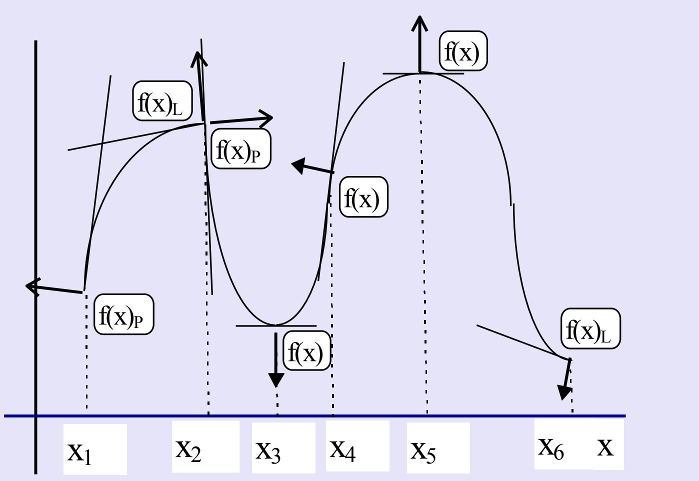
$$\frac{\partial f(x_1^o,\ x_2^o,\ \dots,\ x_n^o)}{\partial x_j} = 0 \qquad pre\ \forall\ j = 1,\dots,n \tag{2.3}$$

resp. *gradient funkcie* v tomto bode je rovný nulovému vektoru

$$\Delta f(x^o) = \left(\frac{\partial f(x^o)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x^o)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x^o)}{\partial x_n} \right)^T = 0$$

Vlastnosti riešenia úlohy nelineárneho programovania

Obr. č.2.6: Extremálne body funkcie



a) body x_3, x_5 sú stacionárnymi bodmi funkcie, funkcia je v týchto bodoch diferen-covateľná a hodnoty prvých derivácií sú evidentne rovné nule (priamky dotykových nadrovín funkcie v týchto bodoch sú rovnobežné s *x-ovou* osou). Bod x_3 je bodom globálneho minima a bod x_5 bodom globálneho maxima funkcie $f(x)$ na množine D;

b) body x_1, x_6 sú bodmi lokálneho minima funkcia a zároveň hraničnými bodmi prípustnej oblasti D. Vidíme, že v bode x_1 má funkcia iba deriváciu sprava a v bode x_6 iba deriváciu zľava a ani jedna z týchto derivácií nie je rovná nule (dotykové nadroviny nie sú rovnobežné s osou x). Oba tieto body lokálneho minima funkcie teda nevyhovujú podmienkam vety 2.2.

c) v bode x_2 funkcia nie je diferencovateľná, nakoľko derivácia fukcie v tomto bode zľava sa nerovná derivácii funkcie v tomto bode sprava (oporná nadrovina funkcie zľava je rôznobežná s opornou nadrovinou funkcie sprava a zhodou okolností ani jedna z nadrovín nie je rovnobežná s osou x. Je evidentné, že podmienky vety 2.2 sa pre tento bod lokálneho maxima funkcie vôbec nedajú preveriť a teda ani uplatniť.

Príklad

Nech funkcia $f(x_1,x_2)$ je definovaná na množine $D=R^2$, to znamená na dvojrozmernom euklidovskom priestore nasledovne

$$f(x_1,x_2) = 10x_1 + 20x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$$

Úloha:

Nájdite lokálne extrémy tejto funkcie.

Riešenie

Vzhľadom na spôsob definovania prípustnej oblasti D, riešime úlohu na voľný extrém. Na základe vety 2.2 riešime systém dvoch rovníc o dvoch neznámych, ktoré predstavujú nutné podmienky existencie extrému funkcie, t.j. rovnosti prvých parciálnych derivácii funkcie nule:

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 10 + x_2 - 4x_1 = 0$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 20 + x_1 - 4x_2 = 0$$

Riešením tejto sústavy rovníc dostávame súradnice stacionárneho bodu funkcie $f(x_1, x_2)$

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = (4, 2) \;\rightarrow\; f(x_1^*, x_2^*) = 48$$

Predbežne bez ďalšej argumentácie poznamenajme, že stacionárny bod je bodom jediného globálneho maxima funkcie.

Príklad

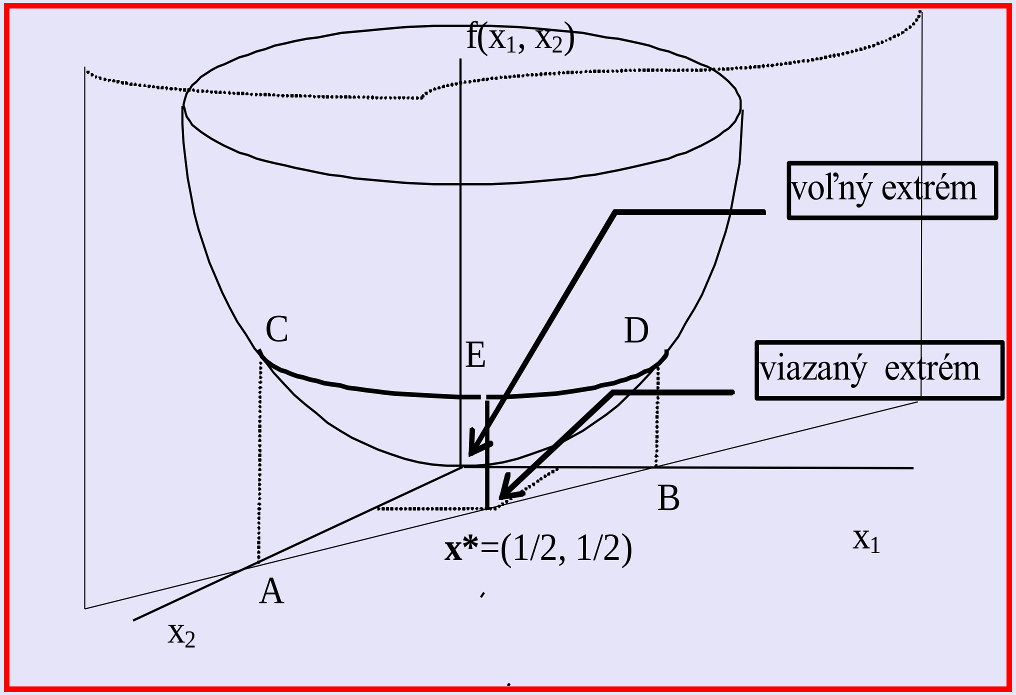
Nájdite viazaný extrém funkcie

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

pri ohraničení

$$h(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1 = 0$$

Obr: Voľný a viazaný extrém funkcie



Vlastnosti riešenia úlohy nelineárneho programovania

a) Geometrická interpretácia úlohy je uvedená na obr. č.2.7. Funkcia $f(x_1,x_2)$ definuje eliptický paraboloid. Z obrázku i z analytického vyjadrenia funkcie je zrejmé, že *voľný extrém funkcie*, a to globálne minimum sa dosahuje v počiatku súradnicového systému a platí

$$f(x_1^*, x_2^*) = f(0,0) = 0$$

b) Pri hľadaní *viazaného extrému funkcie* zohľadníme ohraničenie

$$h(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1 = 0$$

- **Graficky tejto rovnici zodpovedá v rovine $[x_1, x_2]$ priamka, ktorá prechádza cez body A a B. V priestore $[x_1, x_2, f]$ zodpovedá tejto rovnici rovina, ktorá obsahuje priamku $[A,B]$ a je rovnobežná s osou f.**

- **Táto rovina pretína eliptický paraboloid v krivke $[C,E,D]$, pričom súradnice x_1, x_2 vyhovujú ohraničujúcej podmienke a súradnica f vyjadruje hodnotu účelovej funkcie $f(x_1,x_2)$.**

- **Vidíme, že minimálna hodnota funkcie zodpovedá bodu E krivky, ktorého priemetom na priamke [A,B] je bod x^* = (1/2,1/2), ktorý je zároveň bodom viazaného minima funkcie a platí**

$$f(x_1^*,x_2^*) = f(1/2,1/2) = 1/2$$

Schémy riešenia úloh nelneárneho programovania

a) Úlohy na *voľný extrém*

b) Úlohy na *viazaný extrém*