Nelineárne optimalizačné modely a metódy

Téma prednášky č. 1

Nelineárne optimalizačné modely v ekonomickom rozhodovaní

(Časť 1)

Prof. Ing. Michal Fendek, CSc.

Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Ekonomická univerzita
Dolnozemská 1
852 35 Bratislava

Ohraničenosť predpokladu lineárnosti pri modelovaní ekonomických procesov

• Využívanie optimalizačných prístupov pri formulovaní a riešení ekonomických úloh na najrôznejších aplikačných úrovniach predstavuje účinný aparát zvyšovania efektívnosti riadiacich činností.

• V súčasnej ekonomickej praxi sa pri riešení problémov kladie dôraz na analýzu zložitých ekonomických väzieb a pri ich formálnom vyjadrení už zväčša nevystačíme s tradične prezentovanou hypotézou o proporcionálnosti ekonomických veličín, čo v konečnom dôsledku vedie k formulácii lineárnych modelov ekonomických systémov, ale vernejšie zobrazenie reálneho ekonomického objektu vyžaduje implementovať do modelov nelineárne funkčné väzby.

• Napokon v praktickej rovine je riešenie zložitých ekonomických úloh nelineárneho charakteru umožnené dostupnosťou kvalitnej výpočtovej techniky a rýchlym rozvojom nových metodologických postupov, efektívnych algoritmov a adekvátnych softwarových produktov.

• **Naše úvahy o možnostiach modelovania a formálneho zobrazenia ekonomických väzieb s *lineárnym, resp. nelineárnym* chakterom a následného riešenia adekvátnej rozhodovacej úlohy budeme ilustrovať na relatívne jednoduchom, ale v rôznych rovinách ekonomickej teórie veľmi frekventovanom príklade *optimalizácie voľby výrobnej stratégie firmy*.**

• **Výrobná stratégia firmy reprezentuje konkrétnu realizáciu jej výrobného programu vychádzajúcu**

- **z poznatkov prieskumu trhu**
- **a jej výrobných možností v určitom časovom období,**

a to v objeme a sortimente,

pričom sa sleduje konkrétny cieľ extremalizácie určitého efektu výrobnej činnosti, ktorým je obvykle, ale nie nevyhntne, maximalizácia zisku.

Príklad č. 1.1

Skúmajme firmu, ktorá vyrába 2 výrobky P_1, P_2 a na ich výrobu spotrebováva 3 výrobné faktory F_1, F_2 a F_3. Informácie o normách spotreby výrobných faktorov na jednotlivé výrobky, disponibilných zásobách výrobných faktorov, cenách výrobkov a celkových nákladoch na výrobu jednotlivých výrobkov sú uvedené v tabuľke č. 1.1.

Tab. č.1.1: Údaje o výrobnom programe firmy

Výrobný faktor	Normy spotreby		Disponibilné zdroje
	P_1	P_2	
F_1	-1	2	4
F_2	2	3	9
F_3	2	-1	4
Cena	6	7	
Celkové náklady	3	6	
Zisk	3	1	

Úlohy

Určte optimálnu výrobnú stratégiu firmy, ktorej cieľom je maximalizáciu zisku pri podmienke neprekročenia disponibilných zdrojov výrobných faktorov za predpokladu, že:

a) medzi objemom výroby a spotrebou výrobných faktorov, tržbami z predaja a celkovými výrobnými nákladmi platí vzťah proporcionality, t.j. lineárna závislosť,

b) lineárna závislosť neplatí medzi objemami výroby jednotlivých výrobkov a celkovými nákladmi, pričom nákladové funkcie majú nasledovný tvar:

- pre výrobok P_1: $n_1(x_1) = x_1^2 - 10$

- pre výrobok P_2: $n_2(x_2) = x_2^2 + 8$

pričom x_1, x_2 sú rozhodovacie premenné, ktorým zodpovedajú hľadané objeny výrob jednotlivých výrobkov.

Riešenie

Pre určenie optimálnej výrobnej stratégie firmy použijeme v oboch prípadoch optimalizačné úlohy s lineárnymi funkciami v sústave ohraničení opisujúcimi výrobnú spotrebu výrobných faktorov, pričom účelová funkcia vyjadrujúca zisk firmy s koeficientami modelovanými v súlade so schémou

"zisk z výrobku = cena - celkové náklady"

bude v prvom prípade lineárna a v druhom prípade nelineárna.

a) **Za predpokladu lineárnej závislosti medzi objemami výroby a ostatnými parametrami modelu možno úlohu voľby optimálnej výrobnej stratégie formulovať v tvare nasledovnej *úlohy lineárneho programovaia (ULP)***

$$f(x_1,x_2) = 3x_1 + x_2 \quad \to max$$

pri ohraničeniach

$$-x_1 + 2x_2 \le 4$$

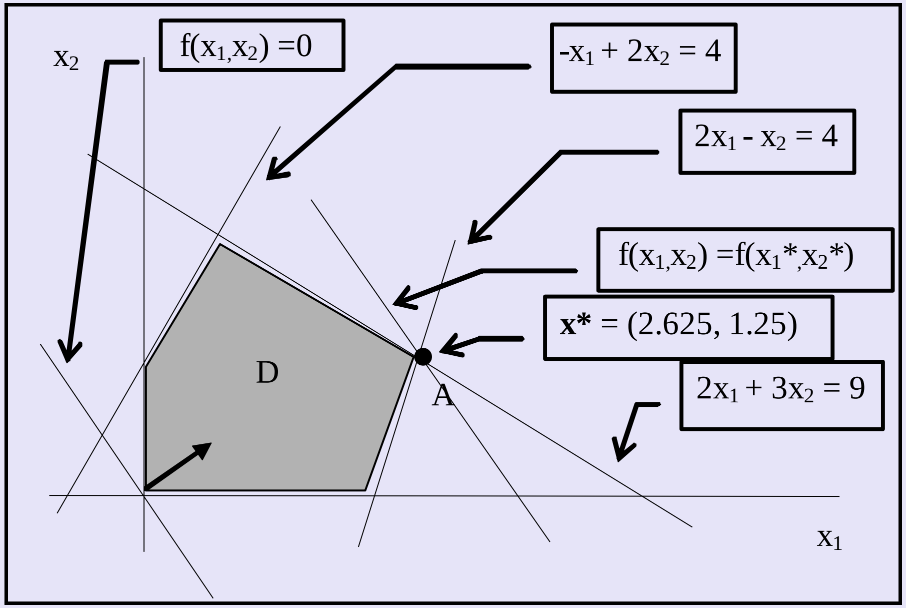
$$2x_1 + 3x_2 \le 9$$

$$2x_1 - x_2 \le 4$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Geometrická interpretácia riešenia úlohy je uvedená na obr. č. 1.1. Všimnime si, že účelová funkcia *f(x)* dosahuje svoje maximum v krajnom bode *A* konvexnej množiny prípustných riešení *D*.

Obr. č. 1.1: Riešenie úlohy s lineárnou funkciou zisku



Optimálne riešenie úlohy je nasledovné

$$\mathbf{x^* = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (2.625, 1.25, 4.125, 0, 0)}$$

kde doplnkové premenné s_1, s_2, s_3 vyjadrujú úroveň nevyčerpaných výrobných faktorov. Pre optimálnu výrobnú stratégiu x^* dosahuje firma zisk

$$f(x^*) = 9{,}125.$$

b) Za predpokladu nelineárnej závislosti medzi celkovými nákladmi výroby a objemami výroby, pričom ostatné funkčné závislosti v modeli ostávajú lineárne, možno úlohu voľby optimálnej výrobnej stratégie formulovať v tvare nasledovnej *úlohy nelineárneho programovaia (UNP)*:

$$f(x_1,x_2) = 6x_1 - (x_1^2 + 8) + 7x_2 - (x_2^2 - 10) \rightarrow max$$

pri ohraničeniach

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

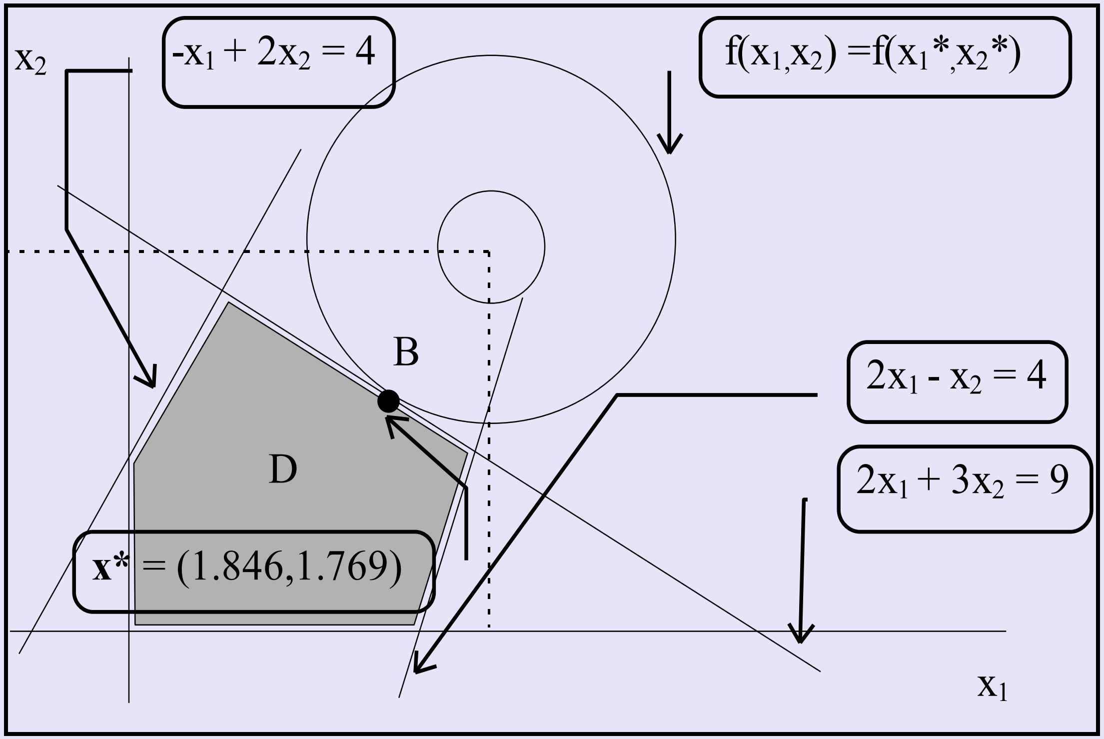
$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$2x_1 - x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Grafické riešenie úlohy je uvedené na obr. č. 1.2.

Obr. č. 1.2: Riešenie úlohy s nelineárnou funkciou tisku



Účelovú funkcia f(x) úlohy možno po jednoduchej úprave transformovať na tvar

$$f(x_1,x_2) = 23.25 - (x_1 - 3)^2 - (x_2 - 3.5)^2 \to max$$

takže hodnota funkcie je vlastne rozdielom čísla 23.25 a druhej mocniny polomeru kružnice so stredom S=[3,3.5]. Grafickým zbrazením účelovej funkcie úlohy je množina kocentrických kružníc so stredom v bode *S*, ktoré reprezentujú úrovňové krivky účelovej funkcie. Ak by sme nezohľadňovali ohraničujúce podmienky úlohy, tak funkcia by dosahovala svoje maximum pre polomer kružnice r=0, t.j.

$$x = (3;3,5),\ f(x) = 23,25.$$

Pri rešpektovaní ohraničujúcich podmienok funkcia dosahuje svoje maximum v hraničnom bode *B* konvexnej množiny prípustných riešení *D*, ktorý je bodom dotyku množiny prípustných riešení a úrovňovej krivky účelovej funkcie s maximálnou hodnotou.

Optimálne riešenie úlohy je nasledovné

$$x^* = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (1.846,\ 1.769,\ 2.308,\ 0,\ 2.077)$$

kde doplnkové premenné s_1, s_2, s_3 vyjadrujú úroveň nevyčerpaných výrobných faktorov. Pre optimálnu výrobnú stratégiu x^* dosahuje firma zisk

$$f(x^*) = 18.923.$$

Uvedený príklad ilustroval spôsob formálneho zobrazenia lineárnych a nelineárnych funkčných väzieb pri modelovaní voľby optimálnej výrobnej stratégie firmy. Našim cieľom však samozrejme nebolo porovnať efektívnosť použitia lineárneho, alebo nelineárneho optimalizačného modelu a favorizovať niektorý z nich. Totiž ani neexistujú všeobecne uplatniteľné argumenty, ktoré by oprávňovali preferovať jeden, alebo druhý modelový prístup.

V celom rade prípadov totiž pri riešení teoretických ale i praktických rozhodovacích úloh prijatie predpokladu lineárnosti a skúmanie zodpovedajúceho lineárneho modelu ekonomického rozhodovacieho problému umožňuje vytvoriť dostatočne dobré predstavy a prijať akceptovateľné závery o analyzovanom objekte.

Je však tiež pravda, že v mnohých prípadoch sú lineárne modely pre formálne zobrazenie ekonomických situácií nevhodné, nakoľko optimálne riešenia získané na ich základe majú nízku výrokovú schopnosť, resp. sú prakticky nerealizovateľné. Takže úlohy nelineárneho programovania umožňujú realistickejšiu deskripciu ekonomického problému, čím zvyšujú stupeň adekvátnosti modelu reálnej skutočnosti.

V najvšeobecnejšom prípade možno úlohu nelineárneho programovania formulovať nasledovne:

$$f(\mathbf{x}) \to \in \{\max, \min\}$$

pri ohraničeniach

$$g_i(x) \leq 0 \qquad i = 1,2,\ldots,m$$
$$h_k(x) = 0 \qquad k = 1,2,\ldots,l$$

kde:

n **- počet rozhodovacích premenných;**

m **- počet ohraničení typu "≤";**

l **- počet ohraničení typu "=";**

x - vektor rozhodovacích premenných x_j**, j=1,2,...,n;**

f(x) - účelová funkcia f(x) : $R^n \to R$**;**

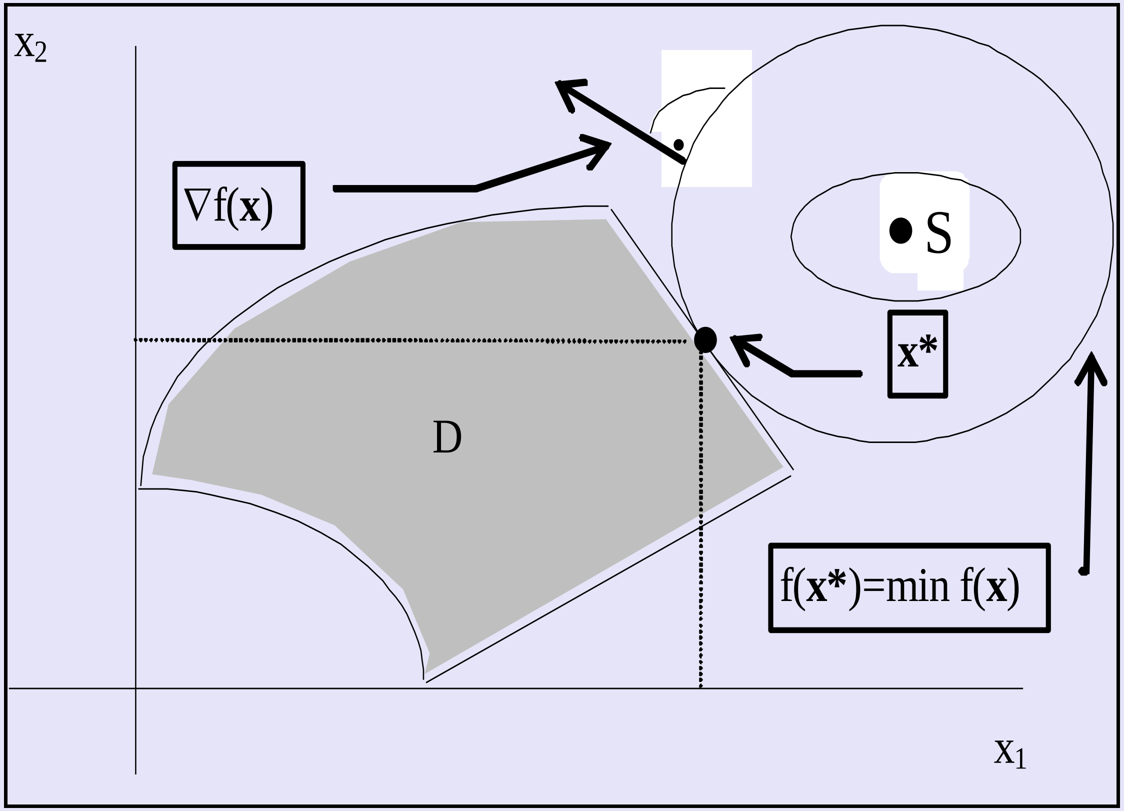
$g_i(x)$ **-** ***i*****-tá funkcia ohraničenia typu "≤" pre** ***i*****=1,2,...,m,** $g_i(x) : R^n \to R$**;**

$h_k(x)$ **-** ***k*****-tá funkcia ohraničenia typu "=" pre** ***k=1,2,...,l,*** $h_k(x) : R^n \to R$**;**

R^n **- množina** ***n*****-rozmerných vektorov reálnych čísel;**

R **- množina reálnych čísel;**

Obr. č. 1.3: Geometrická interpretácia úlohy NP



Riešenie úlohy spočíva v nájdení extrému, v tomto prípade minima účelovej funkcie *f(x)* na množine prípustných riešení *D*. Konkrétnym hodnotám účelových funkcií zodpovedajú úrovčové krivky, v našom prípade kocentrické elipsy so stredom *S*, ktorý korešponduje s bodom voľného extrému funkcie. Gradient fukcie $\nabla f(x)$ predstavuje smer najstrmšieho rastu jej hodnôt a optimálne riešenie úlohy, t.j. viazaný extrém funkcie sa realizuje v bode x^*, ktorý je dotykovým bodom množiny prípustnych riešení úlohy *D* a úrovňovej krivky $f(x^*)$.

Od vlastností účelovej funkcie f(x) a funkcií sústavy ohraničení $g_i(x)$, resp. $h_k(x)$, ako aj spôsobu definovania oboru rozhodovacích premenných x_j úlohy nelineárneho programovania (1.1),(1.2),(1.3) sa odvíja metóda riešenia úloh, čo predstavuje *algoritmický aspekt problému*.

Samozrejme, vlastnosti použitých funkcií a definičný obor premenných sú implikované špecifickými vlastnosťami modelovaných funkčných väzieb ekonomického systém, čo predstavuje *aplikačný aspekt problému.*

Príklady aplikácie nelineárnych optimalizačných modelov

Model maximalizácie zisku firmy

Model minimalizácie nákladov firmy pri fixovanej úrovni produkcie

Model optimálnej voľby portfólia

Nelineárne dopravné úlohy

Nelineárny dvojsektorový model optimalizácie výroby

Model optimalizácie hospodárskej politiky