Zlomkové programovanie

Charnes-Cooperov algoritmus

Metóda je založená na transformácii úlohy zlomkového programovania na úlohu lineárneho programovania. Všeobecná formulácia úlohy zlomkového programovania je:

$$f(x) = \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \to \min \qquad \text{pri ohraničení:} \qquad Ax \le b,\ x \ge 0$$

a rozlišujeme dva možné prípady a aj dva spôsoby transformácie:

1. $d^T x + \beta > 0 \qquad z = \dfrac{1}{d^T x + \beta} \qquad y = z.x$

$$F(y,z) = c^T y + \alpha z \to \min \qquad Ay - zb \le 0$$
$$d^T y + \beta z = 1$$
$$y \ge 0, z \ge 0$$

2. $d^T x + \beta < 0 \qquad -z = \dfrac{1}{d^T x + \beta} \qquad y = z.x$

$$F(y,z) = -c^T y - \alpha z \to \min \qquad Ay - zb \le 0$$
$$-d^T y - \beta z = 1$$
$$y \ge 0, z \ge 0$$

Poznámka: ak $\exists\ x_1, x_2$ také, že $d^T x_1 + \beta > 0$ a $d^T x_2 + \beta < 0$ účelová funkcia je neohraničená.

Riešený príklad:

$$f(x) = \frac{3x_1 - 4x_2 + 8}{2x_1 + x_2 + 3} \to \max(\min)$$
$$-3x_1 + 4x_2 \le 12$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

podmienka $d^T x + \beta > 0$ pre $\forall x$ a potom $z = \dfrac{1}{2x_1 + x_2 + 3}$

$$c^T = (3,-4),\ d^T = (2,1), \alpha = 8, \beta = 3$$

úloha $F = 3y_1 - 4y_2 + 8z \to \max(\min)$

$$-3y_1 + 4y_2 - 12z \le 0 \qquad y_1 \ge 0$$
$$y_1 + y_2 - 6z \le 0 \qquad y_2 \ge 0$$
$$2y_1 + y_2 + 3z = 1 \qquad z \ge 0$$

	c_j^{II}	0	0	0	0	0	1		
	c_j	3	-4	8	0	0	0		
báza	c_b	y1	y2	z	s1	s2	w	b	
s1	0	-3	4	-12	1	0	0	0	
s2	0	1	1	-6	0	1	0	0	
w	1	2	1	3	0	0	1	1	1/3
c_j-z_j^{II}		-2	-1	-3	0	0	0	1	
s1	0	5	8	0	1	0	4	4	1/2
s2	0	5	3	0	0	1	2	2	2/3
z	8	2/3	1/3	1	0	0	1/3	1/3	1
c_j-z_j		-7/3	-20/3	0	0	0	-8/3	8/3	<-max
y2	-4	5/8	1	0	1/8	0	1/2	1/2	
s2	0	25/8	0	0	- 3/8	1	1/2	1/2	
z	8	11/24	0	1	- 1/24	0	1/6	1/6	
c_j-z_j		11/6	0	0	5/6	0	2/3	- 2/3	<-min

Optimálne riešenie (min): $x_1 = y_1/z =$ **0**, $x_2 = y_2/z = 0{,}5/0{,}16 =$ **3**, $f(x) = F(y, z) =$ **-2/3**