Kvadratické programovanie

Shetty-Lemkeho algoritmus

Táto metóda patrí medzi simplexové algoritmy, a je založená na hľadaní bodu vyhovujúceho podmienkam optimálnosti Kuhna-Tuckera. Úloha kvadratického programovania je úlohou nelineárneho programovania, v ktorej sústava ohraničení je lineárna a účelová funkcia je kvadratická. Všeobecná formulácia úlohy kvadratického programovania je:

$$f(x) = x^T C x + p^T x \to \min$$

$$x \in D$$

$$D = \{x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$$

- n – počet rozhodovacích premenných úlohy
- x – vektor rozhodovacích premenných, $x \in R^n$
- C – symetrická, kladne semidefinitná matica
- D – konvexná polyedrálna množina v R^n, $D \subset R^n$
- A – matica sústavy ohraničení

Inicializačná fáza : Podmienky optimálnosti K-T:

$$\begin{array}{lllll} -2Cx - A^T u + v & & + \mu q & = p \\ Ax & + y & + \mu t & = b \end{array}$$

kde $q_j = -1$, ak $p_j < 0$ $\quad t_i = -1$, ak $b_i < 0$

$q_j = 0$, ak $p_j \geq 0$ $\quad t_i = 0$, ak $b_i \geq 0$

$$x \geq 0,\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ y \geq 0$$

$$x_j . v_j = 0 \qquad u_i . y_i = 0$$

Zostavujeme simplexovú tabuľku v tvare:

	x	u	v	y	μ	p,b
v	-2C	$-A^T$	E		q	p
y	A			E	t	b

a východiskové bázické riešenie : $[x, u, v, y, \mu] = [0, 0, p, b, 0]$

a) ak $v \geq 0$, $y \geq 0$, tak vektor $x = [0, 0]$ je optimálnym riešením úlohy

b) inak zmena bázy, kde vedúci stĺpec je μ a vedúci riadok minimálny prvok pravej strany

Aby sme získali OR, pokračujeme dovtedy, kým sa premenná μ stane nebázickou.

Pravidlo výpočtu:

Ak z bázy vystúpil v predchádzajúcej (k-1)-ej iterácii vektor premennej v_j (resp. x_j), alebo y_i (resp. u_i), tak v aktuálnej k-tej iterácii vstúpi do bázy vektor x_j (resp. v_j), alebo u_i (resp. y_i).

Riešený príklad:

$$f(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_1 - 14x_2 \to \min$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\le 5 \\ x_1 + 4x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} -3 \\ -14 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

potom K-T podmienky:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 - 3u_1 - 1u_2 + v_1 \quad -\mu &= -3 \\ 4x_1 - 10x_2 + 2u_1 - 4u_2 \quad + v_2 \quad -\mu &= -14 \\ 3x_1 - 2x_2 \qquad\qquad + y_1 \quad &= 5 \\ x_1 + 4x_2 \qquad\qquad + y_2 \quad &= 6 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} &x \ge 0, u \ge 0, v \ge 0, y \ge 0 \\ &x_j . v_j = 0 \\ &u_i . y_i = 0 \end{aligned}$$

Tabuľka:

báza	x1	x2	u1	u2	v1	v2	y1	y2	μ	p,b	
v1	-2	4	-3	-1	1	0	0	0	-1	-3	-3
v2	4	-10	2	-4	0	1	0	0	-1	-14	-14
y1	3	-2	0	0	0	0	1	0	0	5	5
y2	1	4	0	0	0	0	0	1	0	6	6
v1	-6	14	-5	3	1	-1	0	0	0	11	11/14
μ	-4	10	-2	4	0	-1	0	0	1	14	7/5
y1	3	-2	0	0	0	0	1	0	0	5	-5/2
y2	1	4	0	0	0	0	0	1	0	6	3/2
x2	- 3/7	1	- 5/14	3/14	1/14	- 1/14	0	0	0	11/14	-11/6
μ	2/7	0	11/7	13/7	- 5/7	- 2/7	0	0	1	43/7	43/2
y1	15/7	0	- 5/7	3/7	1/7	- 1/7	1	0	0	46/7	46/15
y2	19/7	0	10/7	- 6/7	- 2/7	2/7	0	1	0	20/7	20/19
x2	0	1	- 5/38	3/38	1/38	- 1/38	0	3/19	0	47/38	47/3
μ	0	0	27/19	37/19	- 13/19	- 6/19	0	- 2/19	1	111/19	3
y1	0	0	-35/19	21/19	7/19	- 7/19	1	- 15/19	0	82/19	82/21
x1	1	0	10/19	- 6/19	- 2/19	2/19	0	7/19	0	20/19	-10/3
x2	0	1	- 7/37	0	2/37	- 1/74	0	6/37	- 3/74	1	
u2	0	0	27/37	1	- 13/37	- 6/37	0	- 2/37	19/37	3	
y1	0	0	-98/37	0	28/37	- 7/37	1	- 27/37	- 21/37	1	
x1	1	0	28/37	0	- 8/37	2/37	0	13/37	6/37	2	

Postup:

1. vedúci stĺpec μ , vedúci riadok v_2, lebo min (-3, -14, 5, 6) = -14
2. vedúci stĺpec x_2 (podľa pravidla), vedúci riadok v_1, lebo min (11/14, 7/5, 3/2) = 11/14
3. vedúci stĺpec x_1 (podľa pravidla), vedúci riadok y_2, lebo min (43/2, 46/15, 20/19) = 20/19
4. vedúci stĺpec u_2 (podľa pravidla), vedúci riadok μ, lebo min (47/3, 3, 82/21) = 3

Optimálne riešenie:

$x^* = (2, 1)$, $y^* = (1, 0)$, $u^* = (0, 3)$, $v^* = (0, 0)$

a hodnota účelovej funkcie $f(x^*) = -19$