Separovateľné programovanie

Koncepcia aproximujúcej funkcie

Formulácia úlohy:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to \min$$

$$g_i(x)=\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \le b_i \qquad i=1...m \quad \text{kde}$$

$$x_j \ge 0 \qquad j=1...n$$

n-počet premenných, m-počet ohraničení

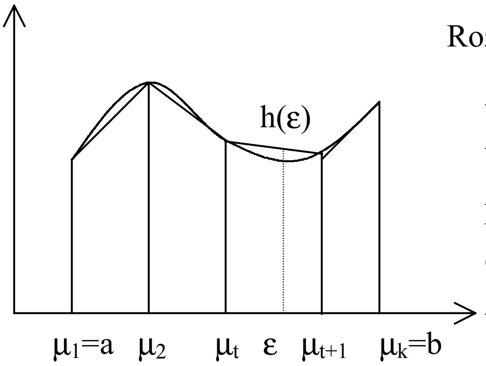
$f_j(x_j)$, $g_{ij}(x_j)$ – funkcia jednej premennej

$f(x)$, $g_i(x)$ – aditívne funkcie

x_j – rozhod. premenná, b_i – koef. pravej strany

Riešenie spočíva v aproximácii nelineárnej úlohy separovateľného programovania na úlohu lineárneho programovania, ktorá sa rieši simplexovou metódou.

Koncepcia aproximujúcej funkcie - každá parciálna funkcia $g_{ij}(x_j)$, $f_j(x_j)$ sa dá aproximovať funkciami po častiach lineárnymi ⇒ dá sa aproximovať aj celková aditívna funkcia.



Rozdelíme si interval <a, b> na k-1 podintervalov <μ_t, μ_{t+1}>

Ak $\varepsilon = \lambda\mu_t + (1-\lambda)\mu_{t+1} \Rightarrow h(\varepsilon) = \lambda h(\mu_t) + (1-\lambda)h(\mu_{t+1})$, teda lineárna konvexná kombinácia dvoch bodov leží na priamke, ktorá ich spája.

Čím podrobnejšie delenie, tým lepšia aproximácia, ale tým rozsiahlejšia zodpovedajúca simplexová tabuľka.

Pôvodná úloha sa transformuje na lineárnu úlohu separovateľného programovania (**LASP**):

$$f^O(x,\lambda)=\sum_{j\in Q} f_j(x_j)+\sum_{j\notin Q}\sum_{p=1}^{k_j}\lambda_{pj} f_j^O(x_{pj}) \to \min$$

$$g_i^O(x,\lambda)=\sum_{j\in Q} g_{ij}(x_j)+\sum_{j\notin Q}\sum_{p=1}^{k_j}\lambda_{pj} g_{ij}^O(x_{pj}) \le b_i \qquad \text{kde}$$

$$\sum_{p=1}^{k_j}\lambda_{pj}=1..j\notin Q \qquad x_j \ge 0..j\in Q \qquad \lambda_{pj}\ge 0$$

$f_j^O(x_{pj})$, $g_{ij}^O(x_{pj})$ – lin. aproximácie

x_{pj} – body delenia

k_j – počet bodov delenia

λ_{pj} – koef. konvex. lin. kombinácie

Aproximujeme len funkcie tých premenných, ktoré sú nelineárne $j\notin Q$ (pre lineárne $j\in Q$).

Zrejme pre každý index $j\notin Q$ sú kladné najviac dve hodnoty λ_{pj} a to pre susedné $p\in$ <$1, k_j$>.

To sa snažíme zabezpečiť aj v simplexe, ktorým LASP riešime.

Pravidlo: Nebázickú λ_{pj} môžeme zaviesť do bázy, len ak zlepší hodnotu účelovej funkcie a zároveň bude v báze iba jedinou λ pre j-tú premennú, alebo jednou z dvoch λ, pričom druhá λ je buď $\lambda_{(p-1)j}$ alebo $\lambda_{(p+1)j}$ (teda λ zodpovedajúca jednému zo susedných bodov delenia).

Pravidlo môžeme ignorovať, ak všetky g_{ij} sú konvexné a všetky f_j sú rýdzokonvexné.

Riešený príklad:

$3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ Všetky g_{ij} sú konvexné a všetky f_j sú rýdzokonvexné, nemusíme

$4x_1^2 + x_2^2 - 16 \leq 0$ si všímať pravidlo a keďže obe g_{1j} sú nelineárne $\Rightarrow Q=\varnothing$

$x_1, x_2 \geq 0$ Z ohraničenia vidíme, že obe premenné sú z int. <a, b> = <0, 4>

Preto si rozdelíme interval na 4 ekvidistantné (rovnako veľké) podintervaly (nie je povinné) pomocou 5 bodov delenia $x_{11}=0$, $x_{21}=1$, $x_{31}=2$, $x_{31}=3$, $x_{41}=4$. A platí $x_{p1}= x_{p2}$ (nie je povinné). Hodnoty jednotlivých funkcií sú uvedené v tabuľke:

p	$x_{p1}= x_{p2}$	$f_1(x_{p1})$	$f_2(x_{p2})$	$g_{11}(x_{p1})$	$g_{12}(x_{12})$
1	0	0	0	0	0
2	1	3	2	4	1
3	2	6	4	16	4
4	3	9	6	36	9
5	4	12	8	64	16

LASP: $f(\lambda) = 3\lambda_{21} + 6\lambda_{31} + 9\lambda_{41} + 12\lambda_{51} \quad + 2\lambda_{22} + 4\lambda_{32} + 6\lambda_{42} + 8\lambda_{52} \rightarrow \max$

$$4\lambda_{21} + 16\lambda_{31} + 36\lambda_{41} + 64\lambda_{51} + 1\lambda_{22} + 4\lambda_{32} + 9\lambda_{42} + 16\lambda_{52} + s_1 = 16$$

$$\lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} + \lambda_{51} = 1$$

$$\lambda_{12} + \lambda_{22} + \lambda_{32} + \lambda_{42} + \lambda_{52} = 1$$

	c_j	0	3	6	9	12	0	2	4	6	8	0	
x_B	c_B	λ_{11}	λ_{21}	λ_{31}	λ_{41}	λ_{51}	λ_{12}	λ_{22}	λ_{32}	λ_{42}	λ_{52}	s_1	b
s_1	0	0	4	16	36	64	0	1	4	9	16	1	16
λ_{11}	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
λ_{12}	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
$c_j - z_j$		0	3	6	9	12	0	2	4	6	8	0	0
λ_{51}	12	0	1/16	1/4	9/16	1	0	1/64	1/16	9/64	1/4	1/64	1/4
λ_{11}	0	1	15/16	3/4	7/16	0	0	- 1/64	- 1/16	- 9/64	- 1/4	- 1/64	3/4
λ_{12}	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
$c_j - z_j$		0	9/4	3	2 1/4	0	0	29/16	13/4	69/16	5	- 3/16	3
λ_{51}	12	0	1/16	1/4	9/16	1	- 1/4	- 15/64	- 3/16	- 7/64	0	1/64	0
λ_{11}	0	1	15/16	3/4	7/16	0	1/4	15/64	3/16	7/64	0	- 1/64	1
λ_{52}	8	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
$c_j - z_j$		0	9/4	3	9/4	0	-5	-51/16	-7/4	- 11/16	0	- 3/16	8
λ_{31}	6	0	1/4	1	9/4	4	-1	- 15/16	- 3/4	- 7/16	0	1/16	0
λ_{11}	0	1	3/4	0	-5/4	-3	1	15/16	3/4	7/16	0	- 1/16	1
λ_{52}	8	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
$c_j - z_j$		0	3/2	0	-9/2	-12	-2	- 3/8	1/2	5/8	0	- 3/8	8
λ_{21}	3	0	1	4	9	16	-4	-15/4	-3	-7/4	0	1/4	0
λ_{11}	0	1	0	-3	-8	-15	4	15/4	3	7/4	0	- 1/4	1
λ_{52}	8	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
$c_j - z_j$		0	0	-6	-18	-36	4	21/4	5	13/4	0	- 3/4	8
λ_{21}	3	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
λ_{22}	2	4/15	0	- 4/5	-32/15	-4	16/15	1	4/5	7/15	0	- 1/15	4/15
λ_{52}	8	- 4/15	0	4/5	32/15	4	- 1/15	0	1/5	8/15	1	1/15	11/15
$c_j - z_j$		-7/5	0	-9/5	-34/5	-15	-8/5	0	4/5	4/5	0	- 2/5	47/5
λ_{21}	3	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
λ_{42}	6	4/7	0	-12/7	-32/7	-60/7	16/7	15/7	12/7	1	0	- 1/7	4/7
λ_{52}	8	- 4/7	0	12/7	32/7	60/7	-9/7	-8/7	- 5/7	0	1	1/7	3/7
$c_j - z_j$		-13/7	0	- 3/7	-22/7	-57/7	-24/7	-12/7	- 4/7	0	0	- 2/7	69/7

Optimálne riešenie je $\lambda_{21} = 1$, $\lambda_{42} = 4/7$, $\lambda_{52} =3/7 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 3*4/7+4*3/7 = 24/7$

$f(x^*) = 69/7$ a rovnaká hodnota vyšla aj pre maximalizačnú úlohu LASP