Metódy prípustných smerov.

Zoutendijkov algoritmus

Úloha s lineárnymi ohraničeniami:

$\boxed{f(x) \to \min, \quad \mathbf{Ax \le b} \quad \mathbf{Wx = w}}$ nájdeme prípustné riešenie $\mathbf{x^k}$, tak môžeme rozdeliť **A, b** na $\mathbf{A^T=[A_1^T, A_2^T]}$ a $\mathbf{b^T=[b_1^T, b_2^T]}$, podľa $\mathbf{A_1x = b_1}$, $\mathbf{A_2x < b_2}$.

Riešime úlohu: $\boxed{\nabla \mathbf{f(x^k)^T d} \to \min, \text{ pre } \mathbf{A_1 d \le 0}, \mathbf{Wd = 0}}$, pričom $-1 \le d_j \le 1$, pre j=1..n, potom

1) ak $\nabla f(x^k)^T d = 0$, bod x^k vyhovuje Kuhn–Tuckerovým podmienkam, koniec algoritmu

2) ak $\nabla f(x^k)^T d < 0$, potom hľadáme optimálnu dĺžku kroku λ^k riešením minimalizačnej úlohy:

$\boxed{\mathbf{f(x^k+\lambda d)} \to \min, \text{ pre } 0 \le \lambda \le \min\{(\mathbf{b_2-A_2x^k})_i/(\mathbf{A_2d^k})_i \mid (\mathbf{A_2d^k})_i>0\}}$, alebo je λ neohraničená.

Potom určíme prípustné riešenie $\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^k+\lambda d}$ pre ďalšiu iteráciu a pokračujeme opätovne rozdelením matíc **A, b** a celým postupom.

Úloha s nelineárnymi ohraničeniami:

$\boxed{f(x) \to \min, \quad \mathbf{g_i(x) \le 0} \quad \text{pre } i=1\ldots m}$ nájdeme prípustné riešenie $\mathbf{x^k}$, potom pre aktívne ohraničenia a účelovú funkciu, riešime nasledovnú minimalizačnú úlohu:

$\boxed{z \to \min, \text{ pre } \nabla \mathbf{f(x^k)^T d} - z \le 0, \nabla \mathbf{g_i(x^k)^T d} - z \le 0}$, pričom $-1 \le d_j \le 1$, pre j=1..n, potom

1) ak $z = 0$, bod x^k je optimálnym riešením, čo znamená koniec algoritmu

2) ak $z < 0$, potom hľadáme optimálnu dĺžku kroku λ^k riešením minimalizačnej úlohy:

$\boxed{\mathbf{f(x^k+\lambda d)} \to \min, \text{ pre } 0 \le \lambda \le \sup\{\lambda \mid \mathbf{g_i(x^k+\lambda d)} \le 0, \text{ pre } i=1..m\}}$, **d**-riešenie predošlej úlohy

Potom určíme prípustné riešenie $\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^k+\lambda d}$ pre ďalšiu iteráciu a postup opakujeme.

Riešený príklad 1 - lineárne ohraničenia:

$f(x) = 2(x_1 - 4)^2 + 4(x_2 - 3)^2 \to \min$ potom $\nabla f(x)^T = (4x_1 - 16, 8x_2 - 24)$

pre $2x_1 + 3x_2 - 12 \le 0$ $W = [1\ 1]$, $w = 5$

$x_1 + x_2 - 5 = 0$

$x_1, x_2 \ge 0$

Zvoľme si bod $\mathbf{x^1} = (5, 0)$, potom $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b_1} = 0$, a $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix}$

Keďže $\nabla f(x^1)^T = (4, -24)$, tak riešime úlohu: $\min 4d_1 - 24d_2$, pre $d_1+d_2=0$, $-d_2 \le 0$ a $-1 \le d_j \le 1$.

Zrejme riešenie (napr. z grafu) je $d = (-1, 1)^T$ a hodnota účelovej funkcie je $-28 < 0$, potom

$\min f((5, 0) + \lambda(-1, 1)) = f(5-\lambda, \lambda) = 6\lambda^2 - 28\lambda + 38$, pre $0 \le \lambda \le 2/1=2$

minimum konvexnej funkcie f (z prvej derivácie = 0) sa nadobúda pre $\lambda = 7/3$ čo nie je vnútri intervalu pre λ, z čoho dostávame $\lambda = 2$ a potrebné hodnoty pre druhú iteráciu.

$\mathbf{x^2} = \mathbf{x^1}+\lambda\mathbf{d}$ = (5, 0) + 2*(-1, 1) = (3, 2), potom sa mení $\nabla f(x^2)^T$ = (-4, -8), A_1 = [2 3], b_1 = 12

Riešime úlohu: min $-4d_1 - 8d_2$, pre $d_1 + d_2 = 0$, $2d_1 + 3d_2 \le 0$ a $-1 \le d_j \le 1$.

Zrejme riešenie (z grafu) je $d = (0, 0)^T$ a hodnota účelovej funkcie je 0 $\Rightarrow$ $\mathbf{x}^*$ =(3, 2) a $f(x^*)$=6.

Riešený príklad 2 - nelineárne ohraničenia:

$f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min$	potom $\nabla f(x)^T = (2x_1 - 4, 2x_2 - 8)$
pre $\quad x_1^2 + x_2^2 \le 4$	$\nabla g_1(x)^T = (2x_1, 2x_2)$
$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \ge 20$	$\nabla g_2(x)^T = (-2x_1 + 8, -2x_2 + 8)$
$x_1, x_2 \ge 0$	$\nabla g_3(x)^T = (-1, 0)$, $\nabla g_4(x)^T = (0, -1)$

Zvoľme si bod $\mathbf{x^1}$ = (0, 0), potom sú aktívne ohraničenia 3 a 4.

Riešime úlohu: min z, pre $-4d_1 - 8d_2 - z \le 0$, $-d_1 - z \le 0$, $-d_2 - z \le 0$ a $-1 \le d_j \le 1$.

Riešenie je $d = (1; 1)^T$ a hodnota účelovej funkcie je $-1 < 0$, potom riešime úlohu $f(0+\lambda, 0-\lambda) \to \min$, pre $0 \le \lambda \le \sup[\lambda, g_i(0+\lambda, 0+\lambda)] = \min(\sqrt{2}, 4-\sqrt{10})$ funkcia nadobúda minimum na 3 čo nie je z intervalu, teda $\lambda = 4-\sqrt{10}$ a máme hodnoty pre druhú iteráciu.

$\mathbf{x^2} = \mathbf{x^1}+\lambda\mathbf{d}$ = $(4-\sqrt{10}; 4-\sqrt{10})$ potom g_2 je aktívne ohraničenie.

Riešime úlohu: min z, pre $(4-2\sqrt{10})d_1 - 2\sqrt{10}d_2 - z \le 0$, $-2\sqrt{10}d_1 - 2\sqrt{10}d_2 - z \le 0$ a $-1 \le d_j \le 1$

Riešenie je $d = (-1; (\sqrt{10}-1)/\sqrt{10})^T$, hodnota účelovej funkcie $-2 < 0$, potom riešime úlohu $f(4-\sqrt{10}-\lambda, 4-\sqrt{10}+(\sqrt{10}-1)\lambda/\sqrt{10}) \to \min$ pre $0\le\lambda\le\sup[\lambda, g_i(4-\sqrt{10}-\lambda, 4-\sqrt{10}+(\sqrt{10}-1)\lambda/\sqrt{10})] = \min(1{,}52; 4-\sqrt{10})$ funkcia má minimum na 0,681 čo je z intervalu, teda λ = 0,681 a máme hodnoty pre 3. iteráciu $\mathbf{x^3} = \mathbf{x^2}+\lambda\mathbf{d}$ = (0,156; 1,304), kde nie je aktívne ani jedno ohraničenie atď... smer k voľnému extrému po ohraničenie, smer po minimum a tak dokola.

Optimálne riešenie je (0; 2) a hodnota účelovej funkcie je 8.

<u>Nahraďme</u> v pôvodnej úlohe g_2 ohraničením v tvare $(\sqrt{10}-2)x_1 + (4-\sqrt{10})x_2 \le 2(4-\sqrt{10})$.

Potom $\nabla g_2(x)^T = (\sqrt{10}-2, 4-\sqrt{10})$. Od štartovného bodu $\mathbf{x^1}$= (0,0) dospejeme k zhodnému bodu $\mathbf{x^2}$ = $(4-\sqrt{10}; 4-\sqrt{10})$. A aktívne je opäť ohraničenie g_2.

Riešime: min z, pre $(4-2\sqrt{10})d_1 - 2\sqrt{10}d_2 - z \le 0$, $(\sqrt{10}-2)d_1 + (4-\sqrt{10})d_2 - z \le 0$ kde $-1 \le d_j \le 1$

Riešenie je $d = (-1; (3\sqrt{10}-6)/(4+\sqrt{10}))^T$, hodnota úč. funkcie $-0{,}754 < 0$, potom riešime úlohu $f(4-\sqrt{10}-\lambda, 4-\sqrt{10}+(3\sqrt{10}-6)\lambda/(4+\sqrt{10})) \to \min$ pre $0\le\lambda\le\sup[\lambda, g_i(4-\sqrt{10}-\lambda, 4-\sqrt{10}+0{,}486\lambda)] = \min(1{,}52; 4-\sqrt{10})$ funkcia má minimum na 0,304 čo je z intervalu, teda λ = 0,304 a máme hodnoty pre 3. iteráciu $\mathbf{x^3} = \mathbf{x^2}+\lambda\mathbf{d}$ = (0,533; 0,986) kde opäť nie je aktívne žiadne ohraničenie atď... smer k voľnému extrému po priamku, smer po minimum a dokola. OR = (0; 2), f(x)=8.

Riešený príklad 3 - nelineárne ohraničenia:

$f(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \min$ potom $\nabla f(x)^T = (2x_1 - 10, 2x_2 - 6)$

pre $2x_1^2 - 3x_2 + 2 \leq 0$ $\nabla g_1(x)^T = (4x_1, -3)$, $\nabla g_2(x)^T = (-1, 0)$

$x_1, x_2 \geq 0$ $\nabla g_3(x)^T = (0, -1)$

Zvoľme si bod $\mathbf{x^1} = (2, 4)$, potom nie je žiadne aktívne ohraničenie.

Riešime úlohu: min z , pre $-6d_1 + 2d_2 - z \leq 0$ a $-1 \leq d_j \leq 1$.

Riešenie je $d = (1; -1)^T$ a hodnota účelovej funkcie je $-8 < 0$, potom riešime úlohu

$f(2 + \lambda, 4 - \lambda) \rightarrow \min$, pre $0 \leq \lambda \leq \sup[\lambda, g_i(2 + \lambda, 4 - \lambda)] = 0{,}176175$ funkcia nadobúda minimum na 2 čo nie je z intervalu, teda $\lambda = 0{,}176175$ a máme hodnoty pre druhú iteráciu.

$\mathbf{x^2} = \mathbf{x^1} + \lambda\mathbf{d} = (2{,}176; 3{,}834)$ potom g_1 je aktívne ohraničenie.

Riešime úlohu: min z , pre $-5{,}648d_1 + 1{,}668d_2 - z \leq 0$, $8{,}704d_1 - 3d_2 - z \leq 0$ a $-1 \leq d_j \leq 1$.

Riešenie je $d = (0{,}325; 1)^T$, hodnota účelovej funkcie $-0{,}169 < 0$, potom riešime úlohu

$f(2{,}176 + 0{,}325\lambda, 3{,}834 + \lambda) \rightarrow \min$ pre $0 \leq \lambda \leq \sup[\lambda, g_i(2{,}176 + 0{,}325\lambda, 3{,}834 + \lambda)] = 0{,}019$ funkcia má minimum na 1,58 čo nie je z intervalu, teda $\lambda = 0{,}019$ a máme hodnoty pre tretiu iteráciu $\mathbf{x^3} = \mathbf{x^2} + \lambda\mathbf{d} = (2{,}182; 3{,}853)$ atď...

Optimálne riešenie je (2,216; 3,942) a hodnota účelovej funkcie je 8,635.