Metódy riešenia úloh na viazaný extrém transformáciou na úlohy na voľný extrém

- metóda Lagrangeovej funkcie
- metóda penalizačných funkcií
- metóda bariérových funkcií

Metóda Lagrangeovej funkcie

Rieši úlohu typu $f(x) \rightarrow min(max)$ pri ohraničení $h_k(x) = 0$ k = 1,2 ... m, kde počet ohraničení je menší ako počet premenných vo funkcii f.
Postup spočíva vo vytvorení Lagrangeovej funkcie v tvare $L(x, v) = f(x) - \sum v_k h_k(x)$, kde v sú Lagrangeove multiplikátory. Využíva sa predpoklad, že viazaný extrém pôvodnej úlohy môže byť nahradený voľným extrémom Lagrangeovej funkcie, lebo $L(x^0,v^0) = f(x^0)$.
V prípade diferencovateľnosti funkcie overujeme nutné a postačujúce podmienky optimálnosti
Nutné podmienky nám definujú stacionárne body, teda riešime sústavu $n+m$ rovníc v tvare:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^{m} v_k \frac{\partial h_k(x)}{\partial x_j} = 0 \qquad j = 1,2,...n$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_k} = -\partial h_k(x) = 0 \qquad k = 1,2,...m$$

Postačujúce podmienky overujú konvexnosť(konkávnosť) funkcie (kvôli určeniu globálneho extrému), pomocou stanovenia definitnosti Hessovej matice v skúmanom stacionárnom bode:

$$\mathbf{H}(L(x,v)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial v_k} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial v_k \partial x_j} & 0 \end{pmatrix}, \text{ pre } i,j = 1,2,...,n \;\; k = 1,2,...m.$$

Vzhľadom na špecifický tvar tejto blokovej matice sa overujú len determinanty submatíc Hessovej matice $\mathbf{H_k}(\mathrm{L}(\mathbf{x},\mathbf{v}))$ (vyškrtneme riadky od $k+1$ po n).
Postačujúcou podmienkou pre extrém typu minimum je platnosť podmienky:

$$(-1)^k \det\left[\mathbf{H_k}\left(L(\mathbf{x},\mathbf{v})\right)\right] > 0, \text{pre } k = m+1,...,n$$

Postačujúcou podmienkou pre extrém typu maximum je platnosť podmienky:

$$(-1)^m \det\left[\mathbf{H_k}\left(L(\mathbf{x},\mathbf{v})\right)\right] > 0, \text{ pre } k = m+1,...,n$$

Metóda penalizačných funkcií

K účelovej funkcii sa pridáva funkcia, ktorá penalizuje porušenie každého ohraničenia. V prípade ohraničenia v tvare rovnice $h(x) = 0$ sa dá využiť penále v tvare $\mu h^2(x)$ (kde $\mu \rightarrow \infty$). Pre ohraničenie v tvare $g(x) \leq 0$ je penále zložitejšie. Má tvar $\mu.max\{0,h(x)\}$. V algoritme je použitá kombinácia oboch prístupov, teda kritérium $\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m} \left[\max\{0, g_i(x)\} \right]^p + \sum_{k=1}^{l} |h_k(x)|^p$

Predpokladáme $p \in Z^+$, obvykle 2. Toto kritérium sa násobí postupne sa zväčšujúcimi μ.

Algoritmus: 1) Zvolíme test ukončenia ε, index $k=1$, východiskový bod $\mathbf{x^k}$, východiskový penalizačný parameter μ^k a koeficient zmeny penalizačného parametra b.

2) Pre východiskový bod $\mathbf{x^k}$ sa rieši úloha $F(x) = f(x) + \mu^k.\alpha(x)$. Riešením tejto úlohy získame bod $\mathbf{x^{\mu k}}$ a položíme $\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^{\mu k}}$.

3) Ak $\mu^k.\alpha(x) < \varepsilon$ potom koniec. Inak $\mu^{k+1} = b.\mu^k$, $k = k+1$ a pokračuje krok 2.

Metóda bariérových funkcií

K účelovej funkcii sa pridáva funkcia, ktorá zamedzuje neprípustnosť každého iter. riešenia. Dá sa využiť len v prípade ohraničenia ako nerovnice, teda $g(x) \leq 0$. Typický tvar bariérového člena je $B(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{-1}{g_i(x)}$ a transformovanej úlohy $F(x) = f(x) + B(x) = f(x) + \mu \sum_{i=1}^{m} \frac{-1}{g_i(x)}$.

Príklady:

1) Použitím Lagrangeovej metódy nájdite extrém funkcie $f(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + 3x_3^2 \to ext$

pri ohraničeniach $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ a $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$.

2) Použitím Lagrangeovej metódy nájdite extrém funkcie $f(x) = x_1x_2x_3 \to ext$

pri ohraničeniach $x_1 + x_2 + x_3 - 5 = 0$ a $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 - 8 = 0$.

3) Použitím metódy penalizačnej funkcie nájdite extrém funkcie $f(x) = 3x^2 + 7/2 \to \min$

pri ohraničení $2x - 4 = 0$.

4) Použitím metódy penalizačnej funkcie nájdite extrém $f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min$

pri ohraničení $-2x_1 + 2x_2 + 6 = 0$.

5) Použitím metódy bariérovej funkcie nájdite extrém $f(x) = 2x_1 + 1/3(x_2 - 3)^3 \to \min$

pri ohraničení $2x_1 + 4 \leq 0$ a $-x_2 + 3 \leq 0$.