Vlastnosti algoritmov, klasifikácia metód pre riešenie úloh nelineárneho programovania

Algoritmus a jeho vlastnosti

Pod algoritmom rozumieme súbor presne definovaných pravidiel určujúcich poradie vykonania istého konečného systému operácií, ktorý zabezpečuje riešenie všetkých úloh daného typu. Každý algoritmus musí mať nasledovné vlastnosti:

1) determinovanosť – jednoznačnosť stanovených pravidiel a ich jasnosť

2) hromadnosť – možnosť aplikácie na ľubovoľné počiatočné údaje (požadované vlastnosti)

3) rezultatívnosť – pre ľubovoľné údaje z množiny počiatočných údajov je garantované nájdenie riešenia očakávaných vlastností po konečnom počte iterácií

Vlastnosť garancie konvergencie algoritmu zabezpečíme na základe zvoleného pravidla. Napr

1) $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| < \varepsilon$ – výpočet končí, ak je absolútny posun menší ako presnosť ε.

2) $\dfrac{\left\| x^{k+1} - x^k \right\|}{\left\| x^k \right\|} < \varepsilon$ – výpočet končí, ak je relatívny posun menší ako presnosť ε.

Klasifikácia metód pre riešenie úloh nelineárneho programovania.

Metódy pre riešenie úloh na voľný extrém

Úloha voľnej optimalizácie spočíva v hľadaní optima (minimum, maximum) funkcie bez akýchkoľvek vedľajších podmienok, resp. ohraničení.

Metódy lineárneho hľadania bez využitia derivácií (funkcie 1 premennej):

Tieto metódy využívajú len výpočty hodnôt funkcie a hľadajú jej minimum na uzatvorenom a ohraničenom intervale.

- Fibonacciho metóda
- metóda dichotomického hľadania
- metóda zlatého rezu

Metódy lineárneho hľadania s využitím derivácií (funkcie 1 premennej):

- metóda polovinného rezu – hľadá min diferencovateľnej funkcie na uzavretom intervale
- Newtonova metóda – hľadá min 2x dif. funkcie pri zadanej východiskovej aproximácii min

Metódy hľadania založené na aproximácii funkcie (1 premennej):

Metódy sú založené na aproximácii funkcie polynómom a následnom hľadaní jeho extrému

- hľadanie kvadratickej aproximujúcej funkcie
- hľadanie kubickej aproximujúcej funkcie

Metódy viacrozmerného hľadania bez využitia derivácií:

- metóda cyklickej posúradnicovej optimalizácie
- metóda postupne konštruovaných simplexov - Nelderova

Metódy viacrozmerného hľadania s využitím derivácii:

- gradientné metódy
- Newtonova metódy minimalizácie dvakrát diferencovateľnej funkcie

Metódy pre riešenie úloh na viazaný extrém

Metódy využívajúce transformáciu úlohy na viazaný extrém na úlohu na voľný extrém

- metóda Lagrangeových multiplikátorov
- metóda penalizačných funkcií – k pôvodnej funkcii sa pridáva funkcia, ktorá je interpretovaná ako penále za porušenie ktoréhokoľvek ohraničenia úlohy
- metóda barierových funkcií – k pôvodnej účelovej funkcii sa pridáva bariérový člen, ktorý zaručí, že algoritmom generované body neprekročia hranice množiny prípustných riešení

Metódy prípustných smerov

Tieto metódy sú založené na postupnom presune od aktuálneho prípustného bodu k nasledujúcemu prípustnému bodu tak, že sa zlepší hodnota účelovej funkcie.

- Zoutendijkova metóda – progresívny smer sa konštruuje pomocnou úlohou (LP)
- Rosenova metóda projekcie gradientu,
- Konvexná simplexová metóda

Kvadratické programovanie

Riešenie sa hľadá prostredníctvom analýzy podmienok Kuhna-Tuckera.

- Shettyho-Lemkeho metóda
- Hildrethova metóda,
- Wolfeho metóda

Zlomkové programovanie

Linearita funkcií ohraničení umožňuje použiť analýzu krajných bodov prípustnej množiny.

- metóda Gilmora a Gomoryho – pri vyhodnocovaní kritéria optimality a pri analýze extremálnych bodov úlohy využíva gradient účelovej funkcie
- metóda Charnesa - Coopera

Separovateľné programovanie

Každá jednotlivá funkcia je aproximovaná po častiach lineárnou funkciou a na jej riešenie sa používa modifikácia algoritmu simplexovej metódy.

- metóda aproximácie nelineárnych funkcií úlohy funkciami lineárnymi po častiach
- Hadleyho metóda aproximácie

Metódy pre riešenie úloh na voľný extrém

Metódy minimalizácie funkcie jednej premennej

Metóda dichotomického hľadania - minimalizuje f(x) na zadanom intervale <a, b>

Metóda vyberá body λ^k, μ^k symetricky s odchýlkou $\varepsilon>0$ voči stredu aktuálneho <a, b>.

Algoritmus:
1) Zvolíme rozlišovaciu schopnosť 2ε, prípustnú konečnú dĺžku intervalu *l*. Nech $<a^1, b^1>$ je východiskový interval neurčitosti. Položíme k = l.
2) Ak $b^k - a^k < l$, bod minima patrí do intervalu $<a^k, b^k>$ - koniec výpočtu. Inak vypočítame $\lambda^k = (a^k+b^k)/2 - \varepsilon$ a $\mu^k = (a^k+b^k)/2 + \varepsilon$.
3) Ak $f(\lambda^k) < f(\mu^k)$, položíme $a^{k+1} = a^k$, $b^{k+1} = \mu^k$, k = k+1 a pokračuje bod 2. Ak $f(\lambda^k) > f(\mu^k)$, potom $a^{k+1} = \lambda^k$, $b^{k+1} = b^k$, k = k+1 a pokračuje bod 2.

Newtonova metóda:

Newtonova metóda je metóda lineárneho hľadania s použitím derivácie.

Rekurentný vzťah v kroku *k+1* z Taylorovho rozvoja má tvar: $\lambda^{k+1} = \lambda^k - \frac{f'}{f''}$

Algoritmus pokračuje, pokiaľ nie je splnená jedna z podmienok:

$|\lambda^k - \lambda^{k+1}| < \varepsilon$ prípadne $|f'(\lambda^k)| < \varepsilon$

Túto procedúru môžeme použiť len pre funkcie dvakrát diferencovateľné, pričom druhá derivácia v bode λ^k musí byť rôzna od 0.

Metódy minimalizácie funkcie n - premenných

Metóda cyklickej posúradnicovej optimalizácie:

V tejto metóde budeme ako smerové vektory pre hľadaný smer presunu od aktuálneho bodu používať súradnicové vektory (rovnobežné so súradnicovými osami):

Algoritmus realizuje hľadanie pozdĺž smerov d^1, d^2, ….d^n, kde d^j je smerový vektor, pre ktorého zložky platí: $d_i^j = 1$ ak $i = j$, inak $d_i^j = 0$ ak $i \neq j$.

Týmto spôsobom sa pri hľadaní mení iba jedna súradnica (x), pričom ostatné zložky ostávajú fixované. Ak je funkcia diferencovateľná, tak algoritmus konverguje k stacionárnemu bodu.

Algoritmus:
1) Zvolíme číslo $\varepsilon > 0$, ktoré budeme používať pre test ukončenia
   Ako smerové vektory zvolíme $d_i^j = 1$ ak $i = j$ $d_i^j = 0$ ak $i \neq j$
   Zvolíme východiskový bod x^1 a položíme $y^1=x^1$, k=j=1.
2) Optimálnu veľkosť kroku λ^j získame riešením úlohy min $\{f(y^j + \lambda d^j) \mid \lambda \in R\}$
   Položíme $y^{j+1} = y^j + \lambda^j d^j$.
   Ak j< n, tak j = j+1 a vrátime sa na 2. Ak j = n, tak pokračujeme krokom 3.

3) Položíme $x^{k+1} = y^{n+1}$, ak platí $\|x^{k+1}-x^k\| < \varepsilon$, algoritmus končí.
   Inak položíme $y^1 = x^{k+1}$, j = 1 a k=k +1. Potom sa vrátime ku kroku 2.

Metóda najrýchlejšieho spádu (gradientná metóda):

Pri zadanom bode x metóda najrýchlejšieho spádu spočíva v realizácii lineárneho hľadania v smere pozdĺž vektora $-\nabla f(x)$.

Algoritmus:
1) Zvolíme číslo $\varepsilon>0$ ako konštantu ukončenia algoritmu
   Zvolíme východiskový bod x^1, položíme k=1.
2) Ak $\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon$, algoritmus končí. Inak položíme $d^k=-\nabla f(x)$ a optimálnu veľkosť kroku λ^k nájdeme riešením úlohy min $\{f(x^k + \lambda d^k) | \lambda \geq 0\}$
   Vypočítame nasledujúci bod $x^{k+1} = x^k + \lambda^k d^k$, priradíme k=k+1 a opakujeme 1.

Príklady:

1) Pomocou dichotomického hľadania nájdite min $f(x) = 3x^3 - 4x + 4$ na intervale <0,3>.
2) Pomocou Newtonovej metódy nájdite min $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 8$ na intervale <3,5>, pričom začnite výpočet v bode 3,6.
3) Cyklickou posúradnicovou metódou nájdite min $f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2$ z bodu (2,0).
4) Gradientnou metódou nájdite min $f(x) = 5(x_1 - 3)^2 + 4(x_2 - 5)^2$ z bodu (2,0).