Teória duality

Ku každej úlohe NLP (primárnej) je možné skonštruovať úlohu, ktorá s ňou súvisí (duálna), podobne ako pri ÚLP.

Nech na priestore $R^n * R^m$ je definovaná funkcia G, ktorá zobrazuje hodnoty do množiny $\overline{R}$ (rozšírená množina reálnych čísel o $+\infty$, $-\infty$) a nech $X \in R^n, U \in R^m$

Ak $f(x) = \sup_{u \in U} G(x,u)$ - min z horných ohraničení a $\theta(u) = \inf_{x \in X} G(x,u)$ - max z dolných hraníc, potom **dvojicou navzájom duálnych úloh vzhľadom na G** nazývame nasledovné úlohy:

P: $\min\{f(x) \mid x \in X \subset R^n\}$ D: $\max\{\theta(u) \mid u \in U \subset R^m\}$

Nech G je definovaná na množine $N*M$, kde $x \in N, u \in M$. Potom funkcia G má v bode (x^0, u^0) **sedlový bod**, ak pre všetky body (x, u) patriace do množiny $N*M$ platí

$$G(x^0, u) \le G(x^0, u^0) \le G(x, u^0)$$

Nech je funkciou $G(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ práve Lagrangeova funkcia, potom ak zapíšeme pomocou vektorových funcií P: $\min\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in X\}$, tak funkcia $G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ a $G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{h}(\mathbf{x})$ a potom D: $\max\{\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{u} \ge \mathbf{0}\}$, kde θ sa dá zapísať ako $\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \inf G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \inf\{f(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X\}$.

Geometrická interpretácia duality

Majme primárnu úlohu len s jedným ohraničením v tvare P: $\min\{f(\mathbf{x}) \mid g(\mathbf{x}) \le 0, \mathbf{x} \in X\}$. Ak zobrazíme v dvojrozmernom priestore množinu $G = \{(z_1, z_2) \mid z_1 = g(\mathbf{x}), z_2 = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X\}$, potom riešenie primárnej úlohy spočíva v nájdení takého prvku G vľavo od osi z_2 ($g(\mathbf{x}) \le 0$), ktorého súradnica z_2 je minimálna ($f(\mathbf{x}) \to min$).

Ak poznáme u, potom $\theta(u)$ získame minimalizáciou Lagrangeovej funkcie $f(\mathbf{x}) + ug(\mathbf{x})$ čo je ekvivalentné $z_2 + u\, z_1$. Ale $z_2 + u\, z_1 = a$ je rovnica priamky so smernicou $-u$, ktorá pretína os z_2 v bode $(0, a)$. Potom riešenie duálnej úlohy spočíva v nájdení sklonu priamky dotýkajúcej sa zospodu množiny G takej, ktorá pretína os z_2 v čo najväčšej hodnote. Optimálnym riešením je sklon u^0 a hodnota účelovej funkcie je hodnota z_2^0.

Zobrazenie dolnej hranice G získame z optimalizačnej úlohy $\min\{f(\mathbf{x}) \mid g(\mathbf{x}) = z_1, \mathbf{x} \in X\}$.

Vety o dualite a sedlové body

<u>Slabá veta o dualite:</u> Nech $\mathbf{x}$ je prípustným riešením úlohy $\min\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in X\}$ a $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je prípustným riešením duálnej úlohy $\max\{\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{u} \ge \mathbf{0}\}$. Potom platí $f(\mathbf{x}) \ge \theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Ak sú infimum účelovej funkcie primárnej a supremum účelovej funkcie duálnej úlohy konečné hodnoty, tak rovnaký vzťah platí aj pre ne, teda $\inf f(\mathbf{x}) \geq \sup \theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Ak je niektorá z týchto hodnôt nekonečná, tak zodpovedajúca duálna úloha nemá prípustné riešenie. (Pripomeňme, že duálnou úlohou k duálnej úlohe je úloha primárna.)

Všeobecne (na rozdiel od ÚLP) platí tento vzťah aj pre optimálne riešenia týchto úloh, teda $f(\mathbf{x}^0) \geq \theta(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0)$. Ak platí tento vzťah ako ostrá nerovnosť, tak tu existuje **duálna medzera**.

Silná veta o dualite: Nech $\mathbf{x^0}$ je prípustné riešenie úlohy $\min\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in X\}$ a ($\mathbf{u^0}$, $\mathbf{v^0}$) je prípustné riešenie duálnej úlohy $\max\{\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}$. Nech sú splnené všetky podmienky konvexnosti (o množine X, funkciách $f(x)$, $g(x)$), afinnosti (pre $h(x)$) a regularity (existencia prípustného riešenia, kde $g(x)<0$ a nulového bodu – stačí ak $X=R^n$). Potom ak platí $\inf f(\mathbf{x}^0) = \sup \theta(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0)$, tak body $\mathbf{x^0}$ a ($\mathbf{u^0}$, $\mathbf{v^0}$) sú optimálnymi riešeniami svojich úloh.

Nech Lagrangeova funkcia dvojice úloh v známom tvare $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^T\mathbf{h}(\mathbf{x})$ má v bode $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0)$ **sedlový bod**, teda nech platí

$$L(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq L(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0) \leq L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0),$$

potom body $\mathbf{x^0}$ a ($\mathbf{u^0}$, $\mathbf{v^0}$) sú optimálnymi riešeniami dvojice duálnych úloh a takisto za daných podmienok vyhovujú Kuhn - Tuckerovým podmienkam optimálnosti.

Tieňové ceny a duálne riešenia

Tieňová cena p_i je mierou zmeny (rastu prípadne poklesu) hodnoty účelovej funkcie pri jednotkovej zmene zdroja b_i. Nie je vždy totožná s duálnou cenou u_i. Ako príklad, kedy to neplatí, môžeme uviesť prípad degeneratívneho riešenia primárnej úlohy, ktorej zodpovedá alternatívne riešenie duálnej úlohy a teda celá množina duálnych cien.

Vyjadrime optimálnu hodnotu účelovej funkcie primárnej úlohy v tvare $\max\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}\}$ ako funkciu zodpovedajúcu konkrétnemu vektoru **b**, dostaneme $v(\mathbf{b}) = \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}\}$, pričom predpokladáme neprázdnu množinu prípustných riešení pre dané **b** (inak $\nu(\mathbf{b}) = -\infty$).

Kladnou tieňovou cenou (TC rastu) p_i^+ nazývame parciálnu deriváciu $\nu(\mathbf{b})$ sprava podľa b_i, teda platí: $p_i^+ = \lim\limits_{\Delta b_i \to 0^+} \dfrac{v(b_i + \Delta b_i) - v(b_i)}{\Delta b_i} = \dfrac{\partial v(\mathbf{b})}{\partial b_i^+} = \min\{u_i^0 \mid \mathbf{u^0} \in U\}$.

Zápornou tieňovou cenou (TC poklesu) p_i^- nazývame parciálnu deriváciu $\nu(\mathbf{b})$ zľava podľa b_i, teda platí: $p_i^- = \lim\limits_{\Delta b_i \to 0^-} \dfrac{v(b_i + \Delta b_i) - v(b_i)}{\Delta b_i} = \dfrac{\partial v(\mathbf{b})}{\partial b_i^-} = \max\{u_i^0 \mid \mathbf{u^0} \in U\}$.

Príklady:

1) Je daná úloha NP v tvare $\min\{f(\mathbf{x}) = x_1 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Formulujte duálnu Lagrangeovu úlohu, nájdite optimálne riešenia primárnej a duálnej úlohy, porovnajte hodnoty ich účelových funkcií a zobrazte graficky v priestore množinu $G = \{(z_1, z_2) \mid z_1 = g(\mathbf{x}), z_2 = f(\mathbf{x})\}$.

2) Skúmajme úlohu LP: $\min f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

pri ohraničeniach

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\geq 1 \\ x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nájdite explicitný tvar duálnej Lagrangeovej úlohy za predpokladu, že

a) $X = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 - x_3 \geq 1; x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$

b) $X = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 \geq 4; x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$

4) Skúmajme úlohu NLP: $\min f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$

pri ohraničeniach

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) ukážte, že bod x^0=(2,2) je OR úlohy postupne na základe geometrického riešenia, Kuhn–Tuckerových podmienok optimálnosti a preverením kritéria sedlového bodu

b) Za predpokladu, že $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \geq 0\}$ formulujte duálnu Lagrangeovu funkciu a ukážte, že jej explicitný tvar je $\theta(\mathbf{u}) = -\left(\frac{u^2}{2}\right) - 4u$.

c) Ukážte, že v tejto úlohe nedochádza k medzere duality.

5) Firma vyrába 2 výrobky a na ich výrobu využíva 3 faktory. Údaje o výrobe, normách spotreby a zisku sú v tabuľke

Faktor Výrobok	V_1	V_2	Zásoba výrob. faktora
F_1	3	4	24
F_2	8	-	16
F_3	5	-2	1
Jednotkový zisk	30	20	

a) Určte optimálnu výrobnú stratégiu firmy (graficky alebo simplexom)

b) Nájdite všetky optimálne riešenia duálnej úlohy, tj. rovnovážne ceny výrobných faktorov

c) Vypočítajte kladné aj záporné tieňové ceny výrobných faktorov

Výsledky ekonomicky interpretujte.