Kuhn – Tuckerove podmienky zapísané pomocou Lagrangeovej úlohy

Majme jednoduchú úlohu nelineárneho programovania min{f(x)| $-x_j \le 0$ j = 1, 2,..., n; $x \in X$}

Lagrangeova funkcia má tvar $L(x,w) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} w_i(-x_i)$

Kuhn – Tuckerove podmienky $\frac{\partial L(x,w)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial(-x_i)}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = w_j$

$w_i \frac{\partial L(x,w)}{\partial w_i} = w_i(-x_i) = w_i x_i = 0$ a tiež $w_i \ge 0$. Spojením $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = w_j$ a $w_i \ge 0$ je $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \ge 0$.

Zovšeobecnenou Lagrangeovou funkciou je Lagrangeova funkcia bez ohraničení nezápornosti

$L(x) = f(x)$ a K–T podmienky vektorovým zápisom sú $\frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \ge \mathbf{0}$ a $\mathbf{x}^{\mathbf{T}} \frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 0$ a $\mathbf{x} \ge 0$.

Alternatívne formy podmienok Kuhna-Tuckera pre rôzne typy úloh:

Majme všeobecnú úlohu nelineárneho programovania so zmiešanými typmi ohraničení:

f(x, y) $\rightarrow$ min

$g_i(x, y) \le 0$ pre i = 1, ... m

$h_k(x, y) = 0$ pre k = 1, ... l

kde x je vektor nezáporných premenných a v je vektor voľných premenných.

Zovšeobecnená Lagrangeová funkcia danej úlohy má tvar:

$$L(x,y,u,v) = f(x,y) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x,y) + \sum_{k=1}^{l} v_k h_k(x,y)$$

Kuhn-Tuckerove podmienky optimálnosti:

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{x}} \ge \mathbf{0} \qquad \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0} \qquad \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{u}} \le \mathbf{0} \qquad \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}^{\mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{x}} = 0 \qquad \mathbf{u}^{\mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0} \qquad \mathbf{u} \ge \mathbf{0}$$

Pravidlá pre konštrukciu K-T podmienok optimálnosti : parciálne derivácie funkcie L sú:

a) podľa nezáporných premenných nezáporné a platí podmienka komplementárnej rovnováhy $x^T(\partial L/\partial x)=0$
b) podľa voľných premenných nulové
c) podľa nezáporných Lagrangeových multiplikátorov zodpovedajúcich nerovniciam nekladné a platí podmienky komplementárnej rovnováhy $u^T(\partial L/\partial u) = 0$
d) podľa voľných Lagrangeových multiplikátorov zodpovedajúcich rovniciam nulové.

Ukážeme si Kuhn-Tuckerove podmienky optimálnosti pre dvojicu nesymetricky duálnych úloh lineárneho programovania:

PU: $f(x) = c^T x \to \min$

$Ax \geq b$

DU: $g(u) = u^T b \to \max$

$u^T A = c^T$

$u \geq 0$

kde: A - matica sústavy ohraničení o rozmere (m,n)

x - vektor rozhodovacích premenných

c - vektor koeficientov účelovej funkcie

b - vektor koeficientov pravej strany

u - vektor duálnych premenných

f(x) - účelová funkcia PU, g(x) - účelová funkcia DU

Pre upravenú sústavu ohraničení $g(x)=b-Ax\leq 0$ je Lagrangeova funkcia nasledovná:

$L(x, u) = c^T x + u^T(b-Ax)$

Podmienky optimálnosti K-T sú:

$(\partial L/\partial x) = c^T - u^T A = 0$

$(\partial L/\partial u) = b - Ax \leq 0$

$u^T(\partial L/\partial u) = u^T(b-Ax) = 0$

$u \geq 0$

Platnosť podmienky $(\partial L/\partial x) = 0$ garantuje prípustnosť riešenia duálnej úlohy.

Platnosť podmienok $(\partial L/\partial u) \leq 0$ a $u \geq 0$ garantuje prípustnosť riešenia primárnej úlohy.

Podmienka $u^T(\partial L/\partial u) = 0$ reprezentuje podmienky vety o rovnováhe.

Príklad:

8. Zapíšte podmienky optimálnosti K–T pre nasledovné úlohy

b) $\min\{f(x, y)|\ g_i(x, y) \leq 0,\ i=1, 2,..., m;\ x \geq 0;\ (x, y)\in R^n\}$

c) $\min\{f(x, y)|\ x \geq 0;\ y \leq 0;\ (x, y)\in R^n\}$

e) $\min\{f(x, y, z)|\ h_k(x, y, z) = 0,\ k=1, 2,..., l;\ x \geq 0;\ y \leq 0;\ (x, y, z)\in R^n\}$