Podmienky optimálnosti v úlohe na voľný extrém:

Nutné podmienky optimálnosti (I. rádu) - ak je f(x) diferencovateľná v x°. f(x) má v x° lokálne minimum, ak platí $\nabla f(x°) = 0$.

Nutné podmienky optimálnosti (podmienky II. rádu) - ak je f(x) dvakrát diferencovateľná v x°. f(x) má v x° lokálne minimum, ak platí $\nabla f(x°) = 0$ a H(x°) je kladne semidefinitná.

Postačujúce podmienky optimálnosti - nech je f(x) diferencovateľná v x°. Ak platí $\nabla f(x°)=0$ a H(x°) je kladne definitná, tak f(x) má v x° lokálne minimum.

Podmienky optimálnosti v úlohe na viazaný extrém:

Nech $S = \{d \in R^n | d \neq 0, x° + \lambda d \in D \text{ pre } \forall \lambda \in (0,\delta), \delta > 0\}$ definuje kužeľ prípustných smerov

$F° = \{d \mid \nabla f(x°)^T d < 0\}$ je množina progresívnych smerov vektorov poklesu funkčnej hodnoty

$G° = \{d \mid \nabla g_i(x°)^T d < 0, i \in I\}$ je množina prípustných smerov (otvorený kužeľ a platí $G° \subset S$)

Ak x° je bodom lokálneho minima, platí $F° \cap S = 0 \Rightarrow F° \cap G° = 0$

Podmienky optimálnosti Fritza Johna:

Nech f: $R^n \to R$, g_i: $R^n \to R$, x° je prípustné riešenie, f(x), $g_i(x)$ sú diferencovateľné v x°. Ak x° je bodom lokálneho optima úlohy, potom $\exists u_0, u_i, i \in I$, kde $I = \{i \mid g_i(x) = 0\}$ pre ktoré platí:

$u_0 \nabla f(x°) + \sum u_i \nabla g_i(x°) = 0$	$u_0 \nabla f(x°) + \mathbf{Gu} = \mathbf{0}$, **G** matica so stĺpcami $\nabla g_i(x°)$
$u_i g_i(x°) = 0$	$\mathbf{u}^T \mathbf{g}(x°) = \mathbf{0}$ → podmienky komplementárnej rovnováhy
$u_0, u_i \geq 0$ pre i = 1, ... m	$(u_0, \mathbf{u}) \geq (0, \mathbf{0})$, **u** vektor Lagrangeových multiplikátorov
$(u_0, u_i) \neq (0, 0)$	$(u_0, \mathbf{u}) \neq (0, \mathbf{0})$,

Podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera - pre úlohu $\min\{f(x) | x \in X, g_i \leq 0 \text{ pre } \forall i\}$**:**

Nutné podmienky K-T. Nech f: $R^n \to R$, g_i: $R^n \to R$, x° je prípustné riešenie, f(x), $g_i(x)$ sú diferencovateľné v x°. Nech vektory $\nabla g_i(x°)$, $i \in I$ sú lineárne nezávislé. Ak x° je bodom lokálneho optima úlohy, potom $\exists u_i, i \in I$, kde $I = \{i \mid g_i(x) = 0\}$ pre ktoré platí:

$\nabla f(x°) + \sum u_i \nabla g_i(x°) = 0$	$\nabla f(x°) + \mathbf{Gu} = 0$, **G** matica so stĺpcami $\nabla g_i(x°)$
$u_i g_i(x°) = 0$	$\mathbf{u}^T \mathbf{g}(x°) = 0$ → podmienky komplementárnej rovnováhy
$u_i \geq 0$ pre i = 1, ... m	$\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$,

Postačujúce podmienky K-T. Nech f: $R^n \to R$, g_i: $R^n \to R$, X je neprázdna množina a skúmaná úloha má prípustné riešenie x°. Nech I je množina aktívnych ohraničení v bode x° a nech f(x) je pseudokonvexná v bode x° a funkcie $g_i(x)$, $i \in I$ sú kvázikonvexné a diferencovateľné v x^0. x^0 je bodom globálneho minima, ak $\exists u_i, i \in I$ pre ktoré platia nutné podmienky optimálnosti.

Podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera - pre úlohu min{f(x)|x∈X, g_i≤0 $h_k(x)$=0 pre ∀i,k}

Nutné podmienky K-T. Nech f: $R^n \to R$, g_i, h_k: $R^n \to R$, x° je prípustné riešenie, f(x), $g_i(x)$ sú diferencovateľné v x° a $h_k(x)$ sú spojito diferencovateľné. Nech vektory $\nabla h_k(x°)$ a $\nabla g_i(x°)$, i∈I sú lineárne nezávislé. Ak x° je bodom lokálneho optima úlohy, potom ∃u_i, i∈I, pre ktoré platí:

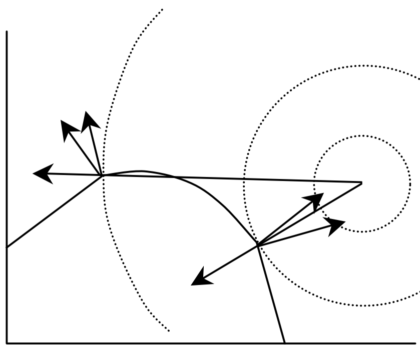
$\nabla f(x°) + \sum u_i \nabla g_i(x°) + \sum v_k \nabla h_k(x°) = 0$	$\nabla f(x°) + \mathbf{Gu} + \mathbf{Hv} = 0$
$u_i g_i(x°) = 0$	$\mathbf{u}^T \mathbf{g}(x°) = 0$
$u_i \geq 0$ pre i = 1, ... m	$\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$

Postačujúce podmienky K-T. Nech f: $R^n \to R$, g_i, h_k: $R^n \to R$, X je neprázdna množina a skúmaná úloha má prípustné riešenie x°. Nech I je množina aktívnych ohraničení v bode x°. Ďalej nech funkcia f(x) je pseudokonvexná v bode x°, funkcie $g_i(x)$, i∈I sú kvázikonvexné a diferencovateľné v x^0 a $h_k(x)$ pre k∈J|v_k>0 sú kvázikonvexné a $h_k(x)$ pre k∈K|v_k<0 sú kvázikonkávne. Bod x^0 je bodom globálneho minima, ak ∃u_i, v_k i∈I pre ktoré platia nutné podmienky optimálnosti.

Grafická interpretácia Kuhn-Tuckerových podmienok

Každý vektor, ktorý sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia gradientov funkcií aktívnych ohraničení $\sum u_i \nabla g_i(x°)$, leží vo výseči vytvorenej týmito gradientmi.

Podľa Kuhn-Tuckerových podmienok platí $-\nabla f(x°) = \sum u_i \nabla g_i(x°)$, čo znamená, že v bode, ktorý vyhovuje podmienkam optimálnosti, leží antigradient účelovej funkcie vo výseči vytvorenej gradientmi funkcií aktívnych ohraničení.



Príklady:

1) Skúmajme úlohu na voľný extrém $\min f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 - 5x_1$

a) Formulujte podmienky optimálnosti I. rádu a určte stacionárne body funkcie

b) Preverte platnosť podmienok optimálnosti II. rádu

c) Je bod x^0 = (0, 0) OR? Ak nie, nájdite vektor **d** ako smer najstrmšieho poklesu hodnoty f.

d) Nájdite minimum f vychádzajúc z bodu x^0 v smere vektora **d**.

2) S využitím podmienok optimálnosti I. a II. rádu riešte úlohu a) $\min f(x) = x_1^3 - 3x_1x_2 + x_2^3$

3) Pre $\min f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1 + 2x_3 + x_2x_3$ overte či bod x^0 = (1/2, 2/3, 4/3) je OR.

4) Skúmajte úlohu lineárneho programovania v tvare:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

pri ohraničeniach

$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) Zapíšte podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera.

b) Pre každý krajný bod množiny prípustných riešení geometricky aj analyticky preverte, či platia podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera.

c) Nájdite optimálne riešenie.

5) Skúmajme úlohu nelineárneho programovania:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \rightarrow \min$$

pri ohraničeniach

$$x_1^2 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

a dva body $\mathbf{x^1} = (0, 1)^T$, $\mathbf{x^2} = (1, 0)^T$, ktoré sú prípustnými riešeniami tejto úlohy.

Pre tieto body preverte:

a) platnosť geometrických podmienok optimálnosti,

b) podmienky optimálnosti *F.Johna,*

c) nutné aj postačujúce podmienky optimálnosti *Kuhna-Tuckera.*

7) Skúmajme úlohu nelineárneho programovania:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 3)^2 + x_2^2 \rightarrow \min$$

pri ohraničeniach

$$x_1^2 + x_2 \leq 5$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$3x_1 + x_2 = 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

a dva body $\mathbf{x^1} = (0, 3)^T$, $\mathbf{x^2} = (3/7, 12/7)^T$, ktoré sú prípustnými riešeniami tejto úlohy.

Pre tieto body preverte:

a) platnosť geometrických podmienok optimálnosti,

b) podmienky optimálnosti *F.Johna,*

c) nutné aj postačujúce podmienky optimálnosti *Kuhna-Tuckera*