Konvexná analýza

Kvadratickou formou matice **A** nazývame funkciu $\mathbf{x}^\mathrm{T}\mathbf{Ax}$, kde **x** je n - rozmerný vektor a **A** je matica typu (n*n). Rozpísane $\mathbf{x}^\mathrm{T}\mathbf{Ax} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \quad pre\ i, j = 1, 2, ..., n$.

Keďže rôzne matice generujú rovnakú kvadratickú formu, potom za jednoznačne priradenú kvadratickú formu k matici považujeme formu priradenú k symetrickej matici.

Kvadratická forma $\mathbf{x}^\mathrm{T}\mathbf{Ax}$ sa nazýva:

– kladne (záporne) semidefinitnou, ak pre všetky $\mathbf{x} \in R^n$ platí $\mathbf{x}^\mathrm{T}\mathbf{Ax} \geq 0$ ($\mathbf{x}^\mathrm{T}\mathbf{Ax} \leq 0$)

– kladne (záporne) definitnou, ak pre všetky $\mathbf{x} \in R^n$ platí $\mathbf{x}^\mathrm{T}\mathbf{Ax} > 0$ ($\mathbf{x}^\mathrm{T}\mathbf{Ax} < 0$)

– indefinitnou, ak existuje $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$ také, že platí $\mathbf{x}^\mathrm{T}\mathbf{Ax} > 0$ a $\mathbf{y}^\mathrm{T}\mathbf{Ay} < 0$.

Podľa typu definitnosti zodpovedajúcej kvadratickej formy označujeme aj typ definitnosti **A**.

Na zisťovanie typu definitnosti slúžia nasledovné postupy:

– skúmanie znamienok hlavných subdeterminantov matice **A**

– Lagrangeova metóda transformácie kvadratickej formy k hlavným osiam

– pomocou skúmania vlastných čísel matice **A**

Trianguláciou matice nazývame postup, ktorým maticu upravíme pomocou ekvivalentných úprav (úprav nemeniacich hodnotu determinantu ani hlavných subdeterminantov matice - ako je pripočítanie lineárnej kombinácie iných riadkov k riadku,..) na hornotrojuholníkovú maticu. Znamienka subdeterminantov sa preskúmajú pomocou znamienok prvkov hlavnej diagonály, pričom robíme uzávery analogické nerovnostiam z definície definitnosti kvadratickej formy.

Postačujúcou podmienkou existencie minima (maxima) v stacionárnom bode $\mathbf{x}^\mathbf{0}$ je kladná (záporná) definitnosť Hessovej matice v tomto bode. {Dôkaz pomocou Taylorovho rozvoja.}

Určenie charakteru stacionárneho bodu Hessovou maticou (ak f(x) je 2krát diferencovateľná):

– ak je matica $\mathbf{H}(\mathbf{x}^\mathbf{0})$ kladne definitná, potom je bod $\mathbf{x}^\mathbf{0}$ bodom *lokálneho minima*

– ak je matica $\mathbf{H}(\mathbf{x}^\mathbf{0})$ záporne definitná, potom je bod $\mathbf{x}^\mathbf{0}$ bodom *lokálneho maxima*

– ak je matica $\mathbf{H}(\mathbf{x}^\mathbf{0})$ indefinitná, potom nie je bod $\mathbf{x}^\mathbf{0}$ bodom lokálneho extrému

– v prípade semidefinitnosti, týmto kritériom neurčíme charakter stacionárneho bodu $\mathbf{x}^\mathbf{0}$.

Konvexnosť funkcie sa dá overovať viacerými spôsobmi: klasicky z definície (funkčná hodnota lineárnej kombinácie leží pod lineárnou kombináciou funkčných hodnôt), pomocou subgradientov funkcie, pomocou Hessovej matice a pod.

Určenie konvexnosti funkcie podľa definitnosti Hessovej matice:

- ak je $\mathbf{H}(\mathbf{x}^0)$ kladne definitná na intervale, potom je f($\mathbf{x}$) na tomto intervale rýdzokonvexná
- ak je $\mathbf{H}(\mathbf{x}^0)$ záporne definitná na intervale, potom je f($\mathbf{x}$) na tomto intervale rýdzokonkávna
- ak je $\mathbf{H}(\mathbf{x}^0)$ kladne semidefinitná na intervale, potom je f($\mathbf{x}$) na tomto intervale konvexná
- ak je $\mathbf{H}(\mathbf{x}^0)$ záporne semidefinitná na intervale, potom je f($\mathbf{x}$) na tomto intervale konkávna
- ak je $\mathbf{H}(\mathbf{x}^0)$ indefinitná na intervale, potom nie je f($\mathbf{x}$) na tomto intervale konvexná

V prípade konvexnosti funkcie na celom definičnom obore sa lokálny extrém stáva globálnym a v prípade rýdzej konvexnosti funkcie sa stáva jediným globálnym extrémom.

Zovšeobecnenie pojmu konvexnej funkcie spočíva v definovaní slabších predpokladov ako bola konvexnosť a rýdza konvexnosť a hlavne vzťahy medzi nimi a ich vlastnosti, ktoré sa využijú pri definovaní podmienok optimálnosti úloh naviazaný extrém. Sú to pojmy: kvázikonvexnosť, rýdza kvázikonvexnosť, silná kvázikonvexnosť, pseudokonvexnosť, rýdza pseudokonvexnosť

Príklady 1 a 4: Nájdite stacionárne body funkcií a určte ich definitnosť:

a) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 8x + 4$ d) $f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_2$

Príklad 2: Odvoďte symetrickú maticu kvadratickej formy ukážte všeobecne jej definitnosť:

$\mathbf{x}^\mathrm{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + 2x_3x_2$

Príklad 3: Určte typ definitnosti matice pomocou triangulácie:

a) $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

Príklad 5: Preverte konvexnosť nasledovných funkcií:

a) $f(x) = 3x + 4$ c) $f(x) = x^2 - 12x$ e) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$

f) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1 - 4x_3x_2$

Príklad 6: Ktoré funkcie sú konvexné a ktoré konkávne?

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2^2 - 10x_1 + 5x_2$ d) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1x_3$

Príklad 8: Preskúmajte úlohu kvadratického programovania

$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{x} + (1/2)\mathbf{x}^\mathrm{T}\mathbf{H}\mathbf{x} \to \min$ pri ohraničeniach $\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}$,

keď viete, že $\mathbf{H}$ je symetrická kladne definitná matica. Formulujte nutné a postačujúce podmienky optimálnosti tejto úlohy a zjednodušte ich pomocou danej štruktúry.