Nelineárne programovanie – príklady úloh

Bežné ekonomické problémy, s ktorými prichádza do styku prax, sa nedajú formulovať v jednoduchej forme proporcionálnych vzťahov, a tým pádom riešiť metódami lineárneho programovania. Realita vyžaduje zložitejšie funkčné väzby a tými sú nelineárne vzťahy.
Príklady aplikácie nelineárnych modelov zo základnej literatúry sú:

- mikroekonomický model firmy, maximalizácia jej zisku alebo minimalizáacia nákladov
- model optimálnej voľby portfólia
- dopravné úlohy s nelineárnymi funkciami prepravných nákladov
- viacsektorové modely optimalizácie výroby
- optimalizácia hospodárskej politiky ako nelineárne cieľové programovanie
- a mnohé iné

Na nasledovných troch úlohách si vysvetlíme základné rozdiely oproti riešeniu lineárnych úloh. Prvá úloha je zopakovaním klasického prístupu matematiky k úlohám na voľný extrém. Jej riešenie spočíva v položení prvých derivácii nule ako nutnej podmienke existencie extrému a overenie jeho typu pomocou druhých derivácií.

Druhá úloha predstavuje klasickú úlohu na viazaný extrém. Pri nej nás nateraz nebude zaujímať postup riešenia, ale tvar úlohy a grafické zobrazenie jej riešenia. Úrovňové krivky majú tvar kružníc a ukážeme si intuitívny prístup získania optimálneho riešenia.

Najzaujímavejšou je tretia úloha, na ktorej prezentujeme rôzne možnosti existencie optimálneho riešenia vo vzťahu k množine prípustných riešení, ktorými sú:

1. krajný bod množiny (prienik dvoch alebo viacerých ohraničení)
2. hraničný bod množiny (leží len na jednom ohraničení)
3. vnútorný bod množiny

– a tým demonštrujeme odlišnosť oproti optimálnemu riešeniu lineárnej úlohy. Úrovňové krivky majú tvar elíps.

Príklad 1:

Sledujme výrobnú činnosť firmy na ťažbu zemného plynu. Objem ťažby zemného plynu $f(x)$ v tonách [t] závisí od dĺžky x práce ťažobnej sondy v dňoch [d]. Produkčná funkcia má nasledovný tvar:

$$f(x) = 150x - 6x^2.$$

Denný objem ťažby je daný funkciou:

$$df(x) / x = 150 - 6x \qquad \text{[t/d]}.$$

Náklady na inštaláciu sondy sú 10 000.- Sk, pričom čas potrebný na inštaláciu je zanedbateľný. Denné prevádzkové náklady sondy sú 2 000.- Sk a cena jednej tony zemného plynu je 100.- Sk.

Odvoďte:

a) Funkciu celkových výrobných nákladov sondy $n(x)$ [Sk].
b) Funkciu priemerných nákladov na jednotku produkcie $an(x)=n(x)/f(x)$ [Sk/t].
c) Funkciu objemu tržieb firmy $tr(x)$ [Sk].
d) Funkciu zisku firmy $z(x)$ [Sk].

Vypočítajte optimálnu dĺžku práce sondy v dňoch pri požiadavke:

a) maximalizácie tržieb firmy,
b) maximalizácie zisku firmy,
c) minimalizácie priemerných nákladov na jednotku produkcie.

Príklad 2:

Firma vyrába dva výrobky V_1 a V_2. Na ich výrobu sa používajú dva druhy zdrojov. Disponibilné objemy zdrojov, normy spotreby a_{ij} , celkové výrobné náklady c_j a ceny výrobkov p_j v prepočte na 1000 ks výrobkov sú uvedené v tabuľke:

Druh zdroja	Disponibilná zásoba	Norma spotreby V_1	Norma spotreby V_2
I	120	20	10
II	150	20	20
Celkové náklady c_j		5	10
Cena výrobku p_j		7	13

V dôsledku výskytu nepodarkov v procese výroby sú spotreba zdrojov a aj celkové náklady lineárnymi funkciami objemov výroby x_j, j= 1,2, pričom analytické tvary príslušných funkcií sú nasledovné:

$$a_{ij}(x_j) = a_{ij} + x_{ij} \qquad i,j = 1,2$$

$$c_j(x_j) = c_j + 0.1x_j \qquad j = 1,2.$$

Výrobky je možné vyrábať v akýchkoľvek proporciách, ich odbyt je zabezpečený. Úlohou je stanoviť také objemy produkcie jednotlivých výrobkov, ktoré možno realizovať s disponibilnými zásobami zdrojov a ktoré zabezpečia maximálny zisk firmy.

Formulujte úlohu nelineárneho programovania a riešte ju graficky!

<u>Príklad 3:</u>

Firma ponúka dva výrobky v množstvách x_1 a x_2, pričom cenovodopytové funkcie tovarov majú tvar:

$$p_1(x_1) = 6 - 1/4x_1 \qquad x_1 \in \langle 0,24 \rangle$$
$$p_2(x_2) = 10 - x_2 \qquad x_2 \in \langle 0,10 \rangle$$

Pre uvedené objemy výroby firma nemusí formalizovať žiadne ohraničenia modelujúce spotrebu výrobných faktorov. Budeme však samostatne skúmať tri prípady odbytových ohraničení:

a) $x_1 \le 15,\ \ x_2 \le 7$ b) $x_1 \le 10,\ \ x_2 \le 4$ c) $x_1 + x_2 \le 10$.

Pre každý z uvedených prípadov formulujte úlohu nelineárneho programovania s účelovou funkciou maximalizujúcou tržby z predaja (nie zisk). Úlohy riešte graficky a charakterizujte vlastnosti riešení úloh.

---

maximalizujeme tržby $z(x) = 6x_1 - 0,25x_1^2 + 10x_2 - x_2^2$

čo sa dá upraviť na tvar: $z(x) = -0,25(x_1 - 12)^2 - (x_2 - 5)^2 + 61$

za podmienok
$$\begin{array}{ll} a) & x_1 \le 15 \wedge x_2 \le 7 \\ b) & x_1 \le 10 \wedge x_2 \le 4 \\ c) & x_1 + x_2 \le 10 \end{array}$$

gradient účelovej funkcie $\nabla z(x) = (-0,5x_1 + 6;\ -2x_2 + 10)$

Hessova matica druhých parciálnych derivácií $\mathbf{H}(x) = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Potom funkcia z nadobúda maximum v bodoch, kde je gradient nulový, teda $x_1 = 12;\ \ x_2 = 5$