Mikroekonomická analýza

(Tézy k prednáške č. 4)

Téma prednášky

Produkčná analýza

(Časť 1)

Prof. Dr. Michal Fendek

Katedra operačného výskumu a ekonometrie

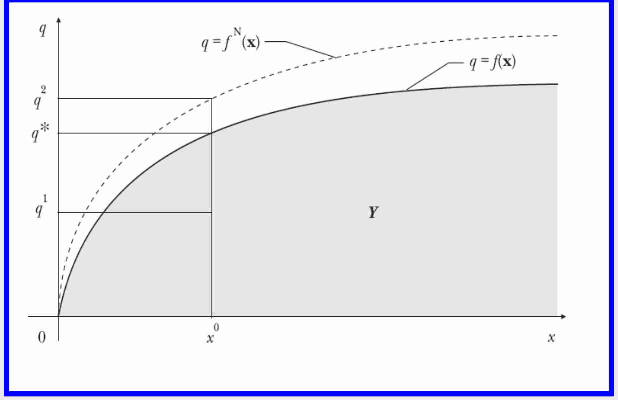
Ekonomická univerzita Bratislava

Dolnozemská 1

852 35 Bratislava

Technológie, vstupy a výstupy

Výrobné faktory môžeme z hľadiska ich spôsobu spotreby vo výrobnom procese rozdeliť do dvoch kategórií:



- fixné vstupy,
- variabilné vstupy.

- množina výrobných možností, resp. produkčná množina

Technologicky prípustné transformácie výrobných faktorov

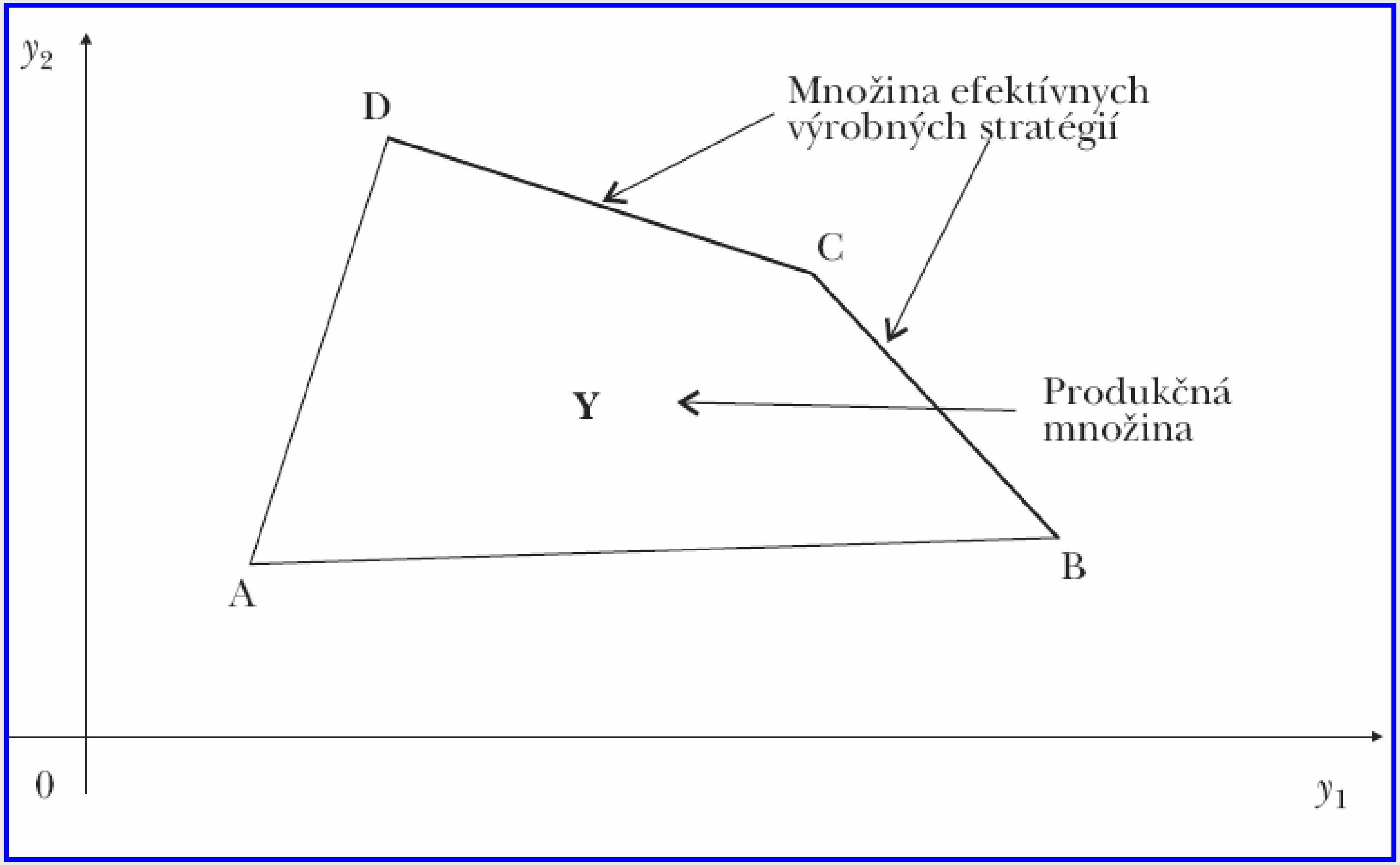
Technologicky efektívne transformácie výrobných faktorov

Vektor produkcie **y* budeme nazývať technologicky efektívnym, ak patrí do množiny technologicky prípustných vektorov produkcie** *Y a ak neexistuje žiadny iný vektor produkcie* ***y⁰∈Y, pre zložky ktorého by platila nerovnosť':***

$$y_j^0 \geq y_j^* \qquad \text{pre} \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

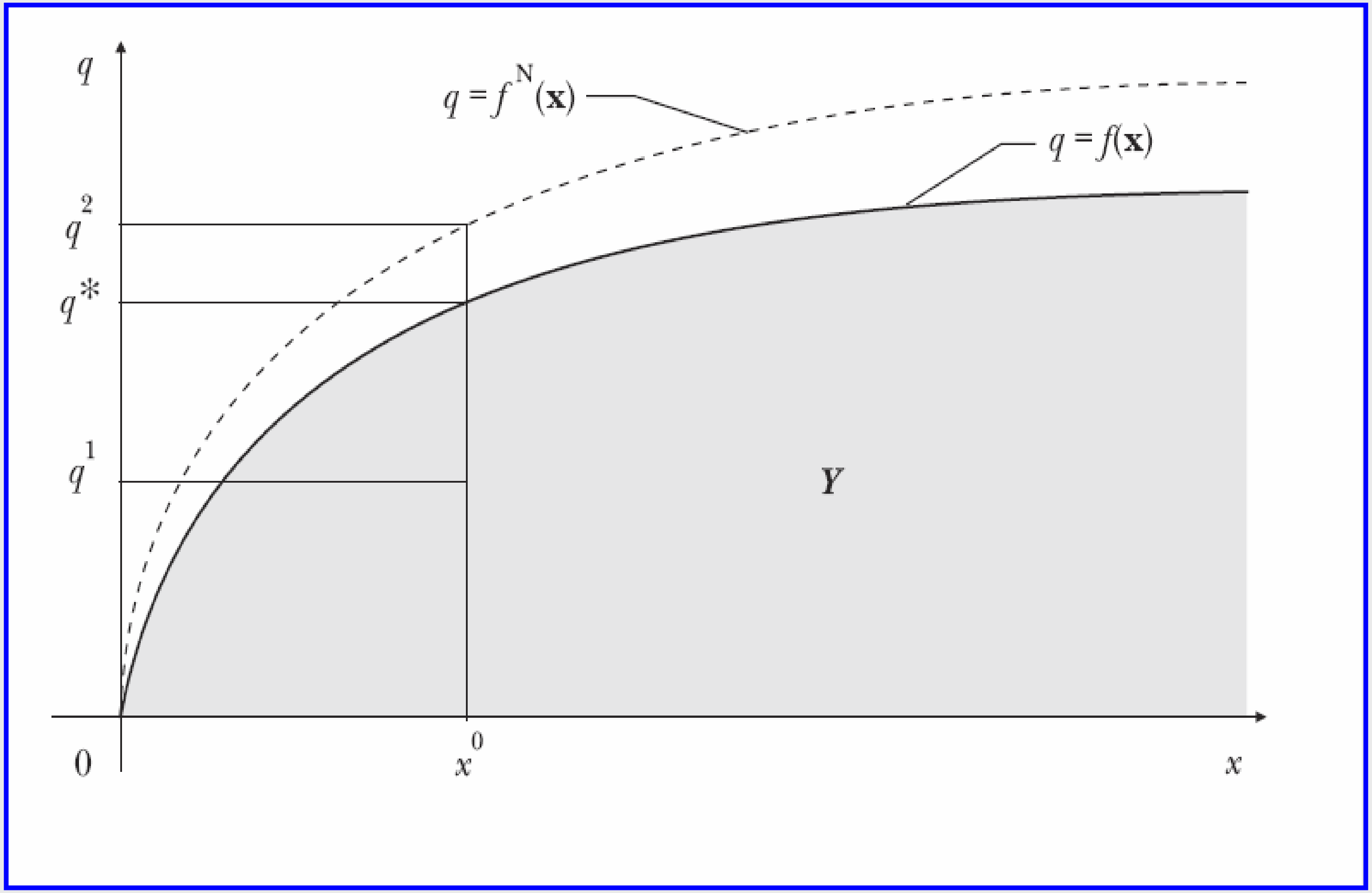
pri súčasnej platnosti vzťahu

$$y_k^0 > y_k^* \qquad \exists_k\ k \in \langle 1, n \rangle$$



y_2
D
Množina efektívnych výrobných stratégií
C
Y
Produkčná množina
A
B
0
y_1

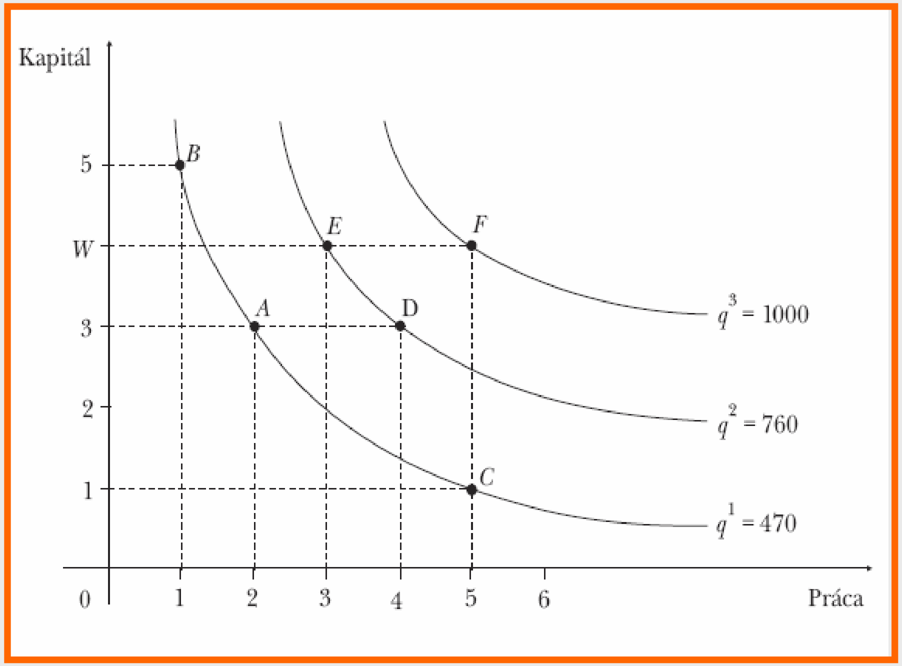
Produkčné funkcie a ich vlastnosti



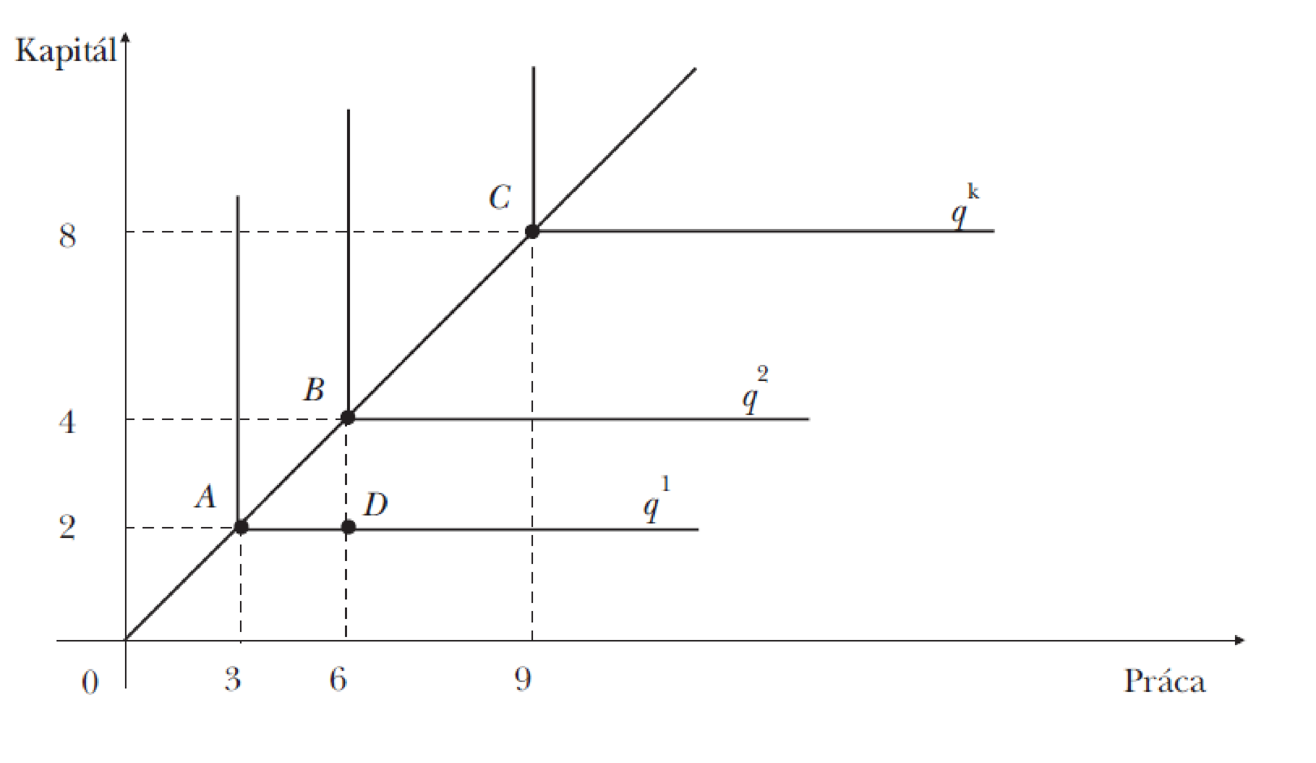
Produkčná analýza

Počet jednotiek kapitálu	Počet pracovníkov					
	1	2	3	4	5	6
1	100	230	320	400	470	530
2	220	350	470	580	680	760
3	320	470	640	760	900	1000
4	400	580	760	920	1080	1180
5	470	680	860	1050	1200	1330
6	520	760	950	1120	1280	1430

Príklad 4.4, str. 224



Výroba pri konštantných proporciách spotreby výrobných faktorov



Na obr. 4.13 ilustrujeme situáciu vo výrobe, keď každá jednotka produktu môže byť vyrobená len s použitím dvoch jednotiek kapitálu a troch jednotiek práce. V tomto prípade sú izokvanty napríklad pre objemy výrob $q^1 = 1$, $q^2 = 2$, $q^3 = 3$ zobrazené ako pravé uhly s ramenami rovnobežnými so súradnicovými osami x_1, x_2 a vrcholmi v bodoch A, B, C, ktoré zároveň reprezentujú jediné možné technologicky efektívne spôsoby výroby pre dané objemy výroby, t. j. q = 1, 2, resp. 3 jednotiek.

Produkčná funkcia reprezentujúca vzťah medzi výrobnou spotrebou kapitálu, práce a produkciou má v našom príklade analytický tvar:

$$f(x_1, x_2) = \min(1/2x_1, 1/3x_2)$$

Analytická formulácia produkčnej funkcie s ľubovoľnými fixnými proporciami dvoch vstupov je potom takáto:

$$f(x_1, x_2) = \min\left(\frac{1}{k_1}x_1, \frac{1}{k_2}x_2\right)$$

kde

x_1 - spotreba prvého vstupu;
x_2 - spotreba druhého vstupu;
k_1 - pomerný koeficient spotreby prvého vstupu;
k_2 - pomerný koeficient spotreby druhého vstupu.

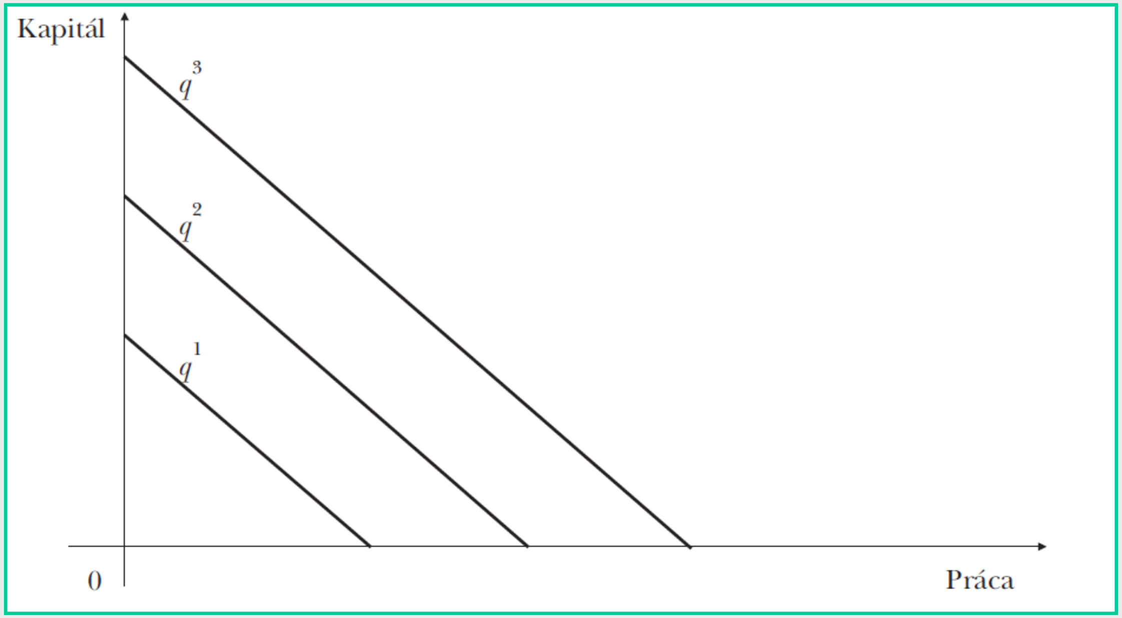
Výroba pri dokonalej substitúcii výrobných faktorov

Špecifický prípad - výrobné faktory sú v rámci aplikovaných technológií voľne a spojito substituovateľné - ***dokonalá substitúcia.***

V prípade takejto technológie možno spotrebu ktoréhokoľvek výrobného faktora a v akomkoľvek objem nahradiť plne spotrebou iného výrobného faktora. Nevylučuje sa ani prípad, keď niektorý výrobný faktor sa vôbec nevyužíva.

Produkčná funkcia má v takomto prípade pre dva výrobné faktory nasledovný analytický tvar

$$q = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$



Krátkodobé a dlhodobé rozhodovanie firmy

$$q = f(x, x^0)$$

Príklad 4.8, str. 233

Kapitál	Počet pracovníkov	Celkový produkt	Priemerný produkt práce	Marginálny produkt
x^0	x	q	q/x	dq/dx
5	0	0	-	-
5	1	50	50	50
5	2	150	75	100
5	3	300	100	150
5	4	400	100	100
5	5	480	96	80
5	6	540	90	60
5	7	580	83	40
5	8	610	76	30
5	9	610	68	0
5	10	580	58	-30

Deriváty produkčnej funkcie

$$\boxed{q = f(x, x^0)}$$

Priemerný produkt variabilného vstupu predstavuje množstvo produkcie (celkový produkt) zodpovedajúce jednotke variabilného vstupu:

$$\boxed{p(x) = \frac{f(x, x^0)}{x}, \quad x > 0} \qquad (4.13)$$

Vráťme sa k príkladu 4.7 a všimnime si, že napríklad 3 pracovníci vyprodukujú 300 jednotiek výstupu, takže priemerný produkt práce troch pracovníkov je

$p(3)$ = 300/3 = 100 jednotiek

na jedného pracovníka pri danej úrovni zamestnanosti. Priemerný produkt je teda v tabuľke 4.2 vypočítaný pre každú úroveň produkcie vydelením celkového produktu v treťom stĺpci počtom robotníkov v druhom stĺpci.

Deriváty produkčnej funkcie

$$\boxed{q = f(x, x^0)}$$

Marginálny produkt variabilného vstupu predstavuje prírastok celkového produktu zodpovedajúci jednotkovej zmene variabilného vstupu, pričom objem fixného vstupu sa nemení, to znamená, že marginálny produkt môžeme vyjadriť nasledovne

$$\boxed{\text{marginálny produkt} = \frac{\Delta q}{\Delta x}}$$

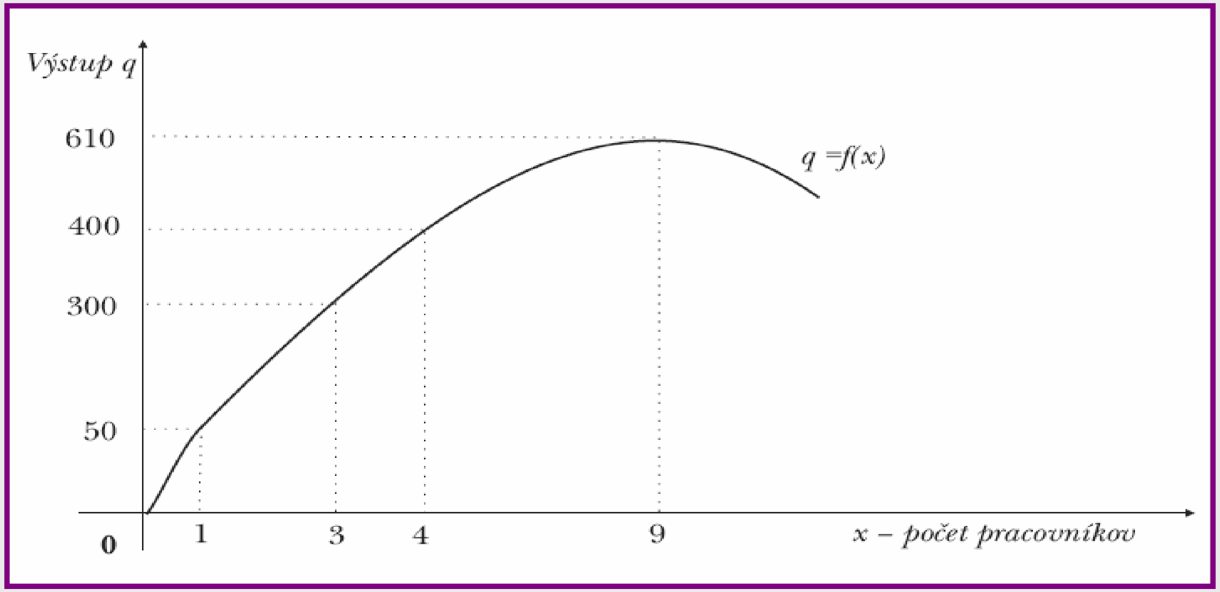
kde

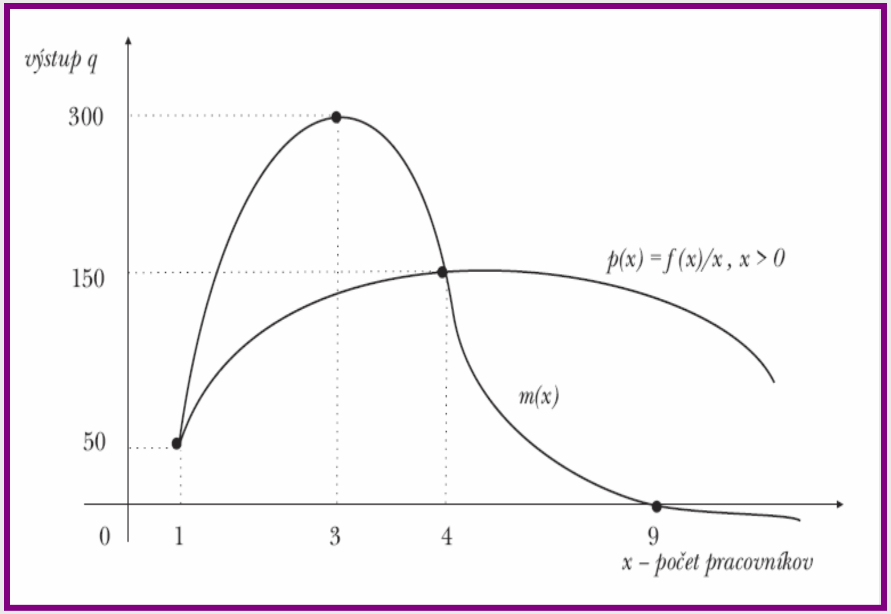
Δq - prírastok celkového produktu

Δx - prírastok variabilného vstupu

resp. pre spojitú a diferencovateľnú produkčnú funkciu možno marginálny produkt variabilného vstupu vyjadriť ako funkciu prvej derivácie produkčnej funkcie nasledovne

$$\boxed{m(x) = \frac{df(x, x^0)}{dx}}$$





zákon klesajúcich marginálnych (hraničných) výnosov.

Celkovým produktom budeme nazývať objem výstupu zodpovedajúci určitej úrovni variabilného vstupu a fixnému vstupu

$$q = f(x, x^0)$$

Priemerný produkt variabilného vstupu predstavuje množstvo produkcie (celkový produkt) zodpovedajúce jednotke variabilného vstupu

$$p(x) = \frac{f(x, x^0)}{x}, \quad x > 0$$

Marginálny produkt variabilného vstupu predstavuje prírastok celkového produktu zodpovedajúci jednotkovej zmene variabilného vstupu, pričom objem fixného vstupu sa nemení, to znamená, že marginálny produkt môžeme vyjadriť nasledovne

$$m(x) = f(x) - f(x-1) = \frac{\Delta q}{\Delta x}$$

Δq - *prírastok celkového produktu*
Δx - *prírastok variabilného vstupu*

resp. pre spojitú a diferencovateľnú produkčnú funkciu možno marginálny produkt variabilného vstupu vyjadriť ako funkciu prvej derivácie produkčnej funkcie nasledovne

$$m(x) = \frac{df(x, x^0)}{dx}$$

Príklad 4.10, str.238

Je daná produkčná funkcia s jedným variabilným vstupom v nasledovnom analytickom tvare

$$q = f(x) = 8x^2 - x^3, \qquad x > 0$$

Pre uvedenú produkčnú funkciu riešme nasledovné úlohy

a) Odvoďme analytický tvar funkcie priemerného a marginálneho produktu.

b) Zobrazme priebeh funkcií krivky celkového, priemerného a marginálneho produktu.

c) Vypočítajme maximálne hodnoty funkcií celkového, priemerného a marginálneho produktu.

d) Ukážme, že krivka marginálneho produktu pretína krivku priemerného produktu v bode jej maxima.

a) Analytický tvar produkčných funkcií je takýto

- Priemerný produkt

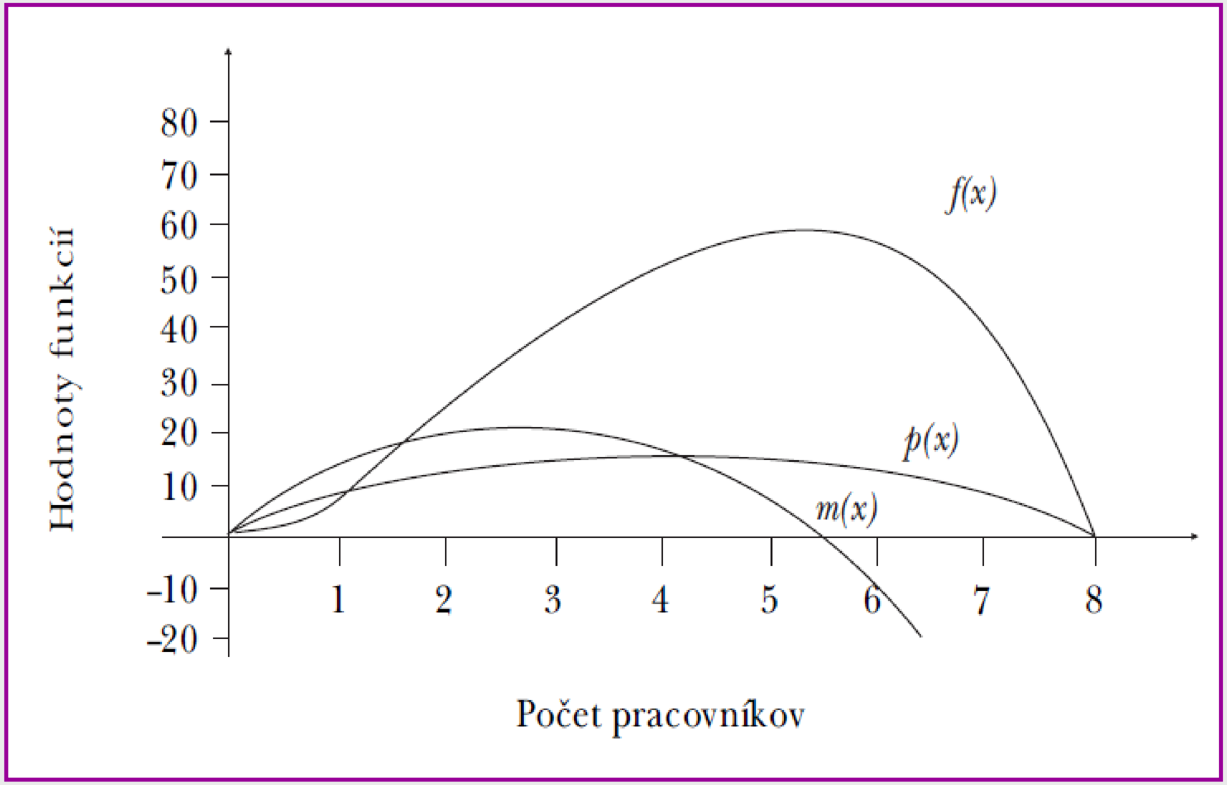
$$p(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{8x^2 - x^3}{x} = 8x - x^2, \quad x > 0$$

- Marginálny produkt

$$m(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d(8x^2 - x^3)}{dx} = 16x - 3x^2$$

Tab. 4.3 : Hodnoty funkcií celkového, priemerného a marginálneho produktu pre produkčnú funkciu $f(x) = 8x^2 - x^3$

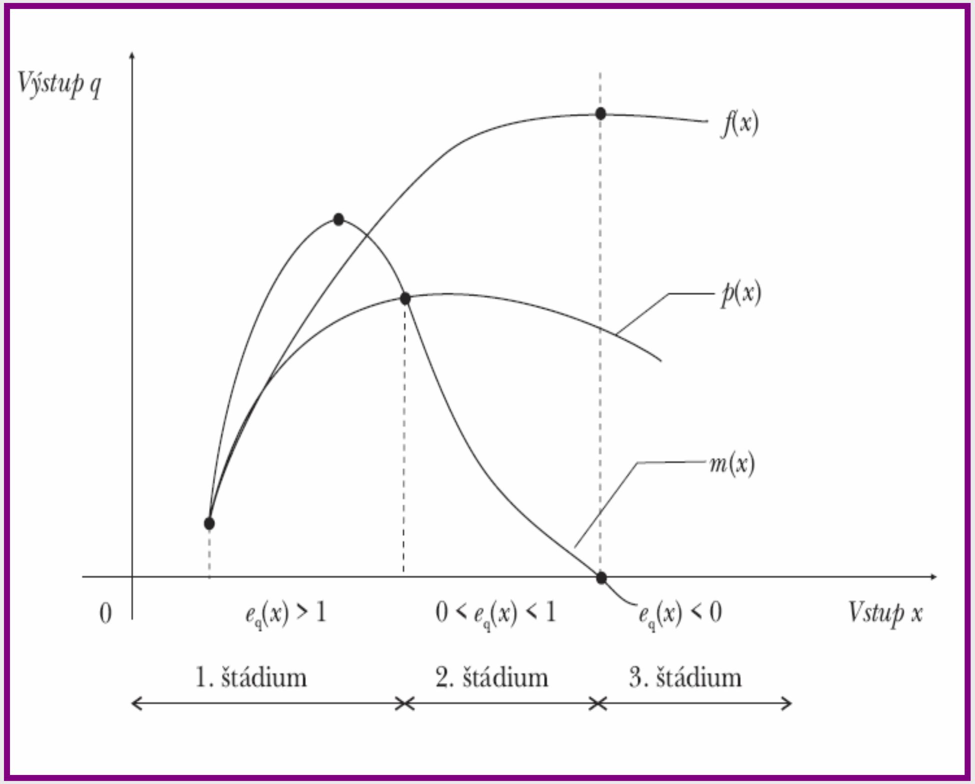
variabilný vstup - *x*	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Celkový produkt *f*(*x*)	0	7	24	45	64	75	72	49	0
Priemerný produkt *p*(*x*)	--	7	12	15	16	15	12	7	0
Marginálny produkt *m*(*x*)	0	13	20	21	16	5	-12	-35	-64



Elasticita výstupu

$$e_q(x) = \frac{\frac{dq}{q}}{\frac{dx}{x}}$$

$$e_q(x) = \frac{\frac{dq}{q}}{\frac{dx}{x}} = \frac{\frac{df(x)}{f(x)}}{\frac{dx}{x}} = \frac{df(x)}{dx} : \frac{f(x)}{x} = \frac{m(x)}{p(x)} = \frac{MP}{PP}$$



$$e_q(x) = 1 = \frac{m(x)}{p(x)} \Rightarrow MP = PP$$

$$p(x^0) \to \max \Rightarrow p(x^0) = m(x^0) \quad ....Dôkaz \;\; !!!$$

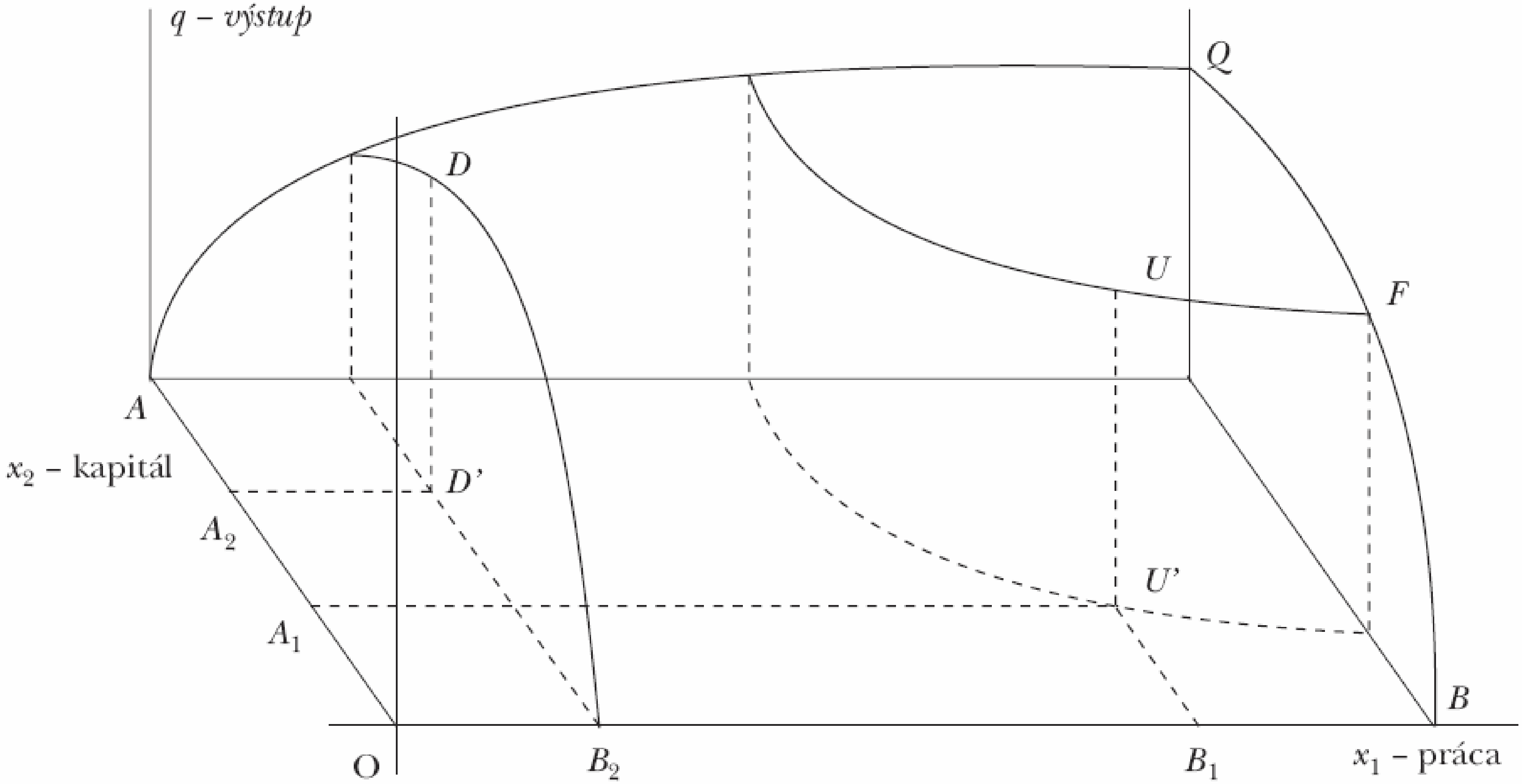
Počet prcovníkov *x*	Priemerný produkt *p(x) = q/x*	Hraničný produkt *m(x) =dq/dx*	Elasticita výstupu *e(x) = (dq/dx)/ (q/x)*
0	-		
1	50	50	1,0
2	75	100	1,33
3	100	150	1,5
4	100	100	1,0
5	96	80	0,83
6	90	60	0,66
7	83	40	0,48
8	76	30	0,39
9	68	0	0,0
10	58	-30	-0,51

Produkčná funkcia pre viac variabilných vstupov

$$q = f(x_1, x_2)$$

Počet pracovníkov x_2	Výška použitého kapitálu x_1			
	1	2	3	4
	Objem výroby firmy			
1	5	11	18	24
2	14	30	50	72
3	**22**	**60**	**80**	**99**
4	29	80	115	125
5	34	84	140	145

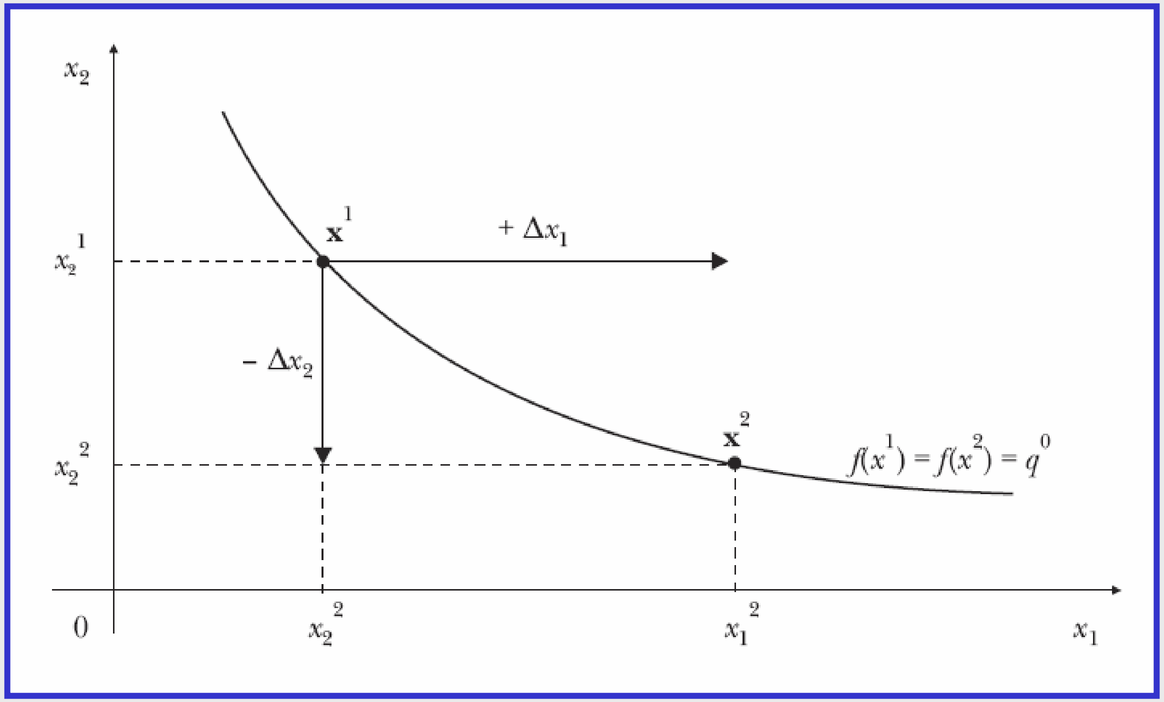
Výška kapitálu x_1 (počet pracovníkov $x_2 = 3$)	Celkový produkt $f(x_1, x_2)$	Priemerný produkt $p_1(x_1, x_2)$	Marginálny produkt $m_1(x_1, x_2)$
1	22	22	-
2	60	30	38
3	80	80/3	20
4	99	99/4	19



q – výstup
Q
D
U
F
A
x2 – kapitál
D'
A2
U'
A1
B
O
B2
B1
x1 – práca

Hraničná miera technickej substitúcie

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{x_2^2 - x_2^1}{x_1^2 - x_1^1} < 0$$



$$-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}}$$

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{m_1(x_1, x_2)}{m_2(x_1, x_2)}$$

Hraničná miera technickej substitúcie

$$\boxed{-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{m_1(x_1, x_2)}{m_2(x_1, x_2)}}$$

Preskúmajme hraničnú mieru technickej substitúcie pre Cobbovu-Douglasovu produkčná funkcia, ktorá má nasledovný analytický tvar

$$f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$$

kde
x_1 - spotreba prvého výrobného faktora
x_2 - spotreba druhého výrobného faktora
a - parameter Cobbovej-Douglasovej funkcie, reálne číslo z intervalu $a \in (0, 1)$

Vypočítajme marginálne produkty obidvoch variabilných vstupov. Dostávame:

$$m_1(x_1, x_2) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial (x_1^a x_2^{1-a})}{\partial x_1} = a\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-a}$$

$$m_2(x_1, x_2) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial (x_1^a x_2^{1-a})}{\partial x_2} = (1-a)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{a}$$

Po dosadení do vzťahu (4.23) dostávame všeobecné vyjadrenie miery technickej substitúcie pre Cobbovu-Douglasovu produkčnú funkciu

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{m_1(x_1, x_2)}{m_2(x_1, x_2)} = \frac{a\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-a}}{(1-a)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{a}} = \frac{a}{1-a}\frac{x_2}{x_1}$$

Dlhodobé výnosy firmy

- časové obdobie je dostatočne dlhé na to, aby bolo možné všetky vstupy firmy považovať za variabilné.

$$e_q(x_i) = \frac{\dfrac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_m)}{f(x_1, x_2, \ldots x_m)}}{\dfrac{\partial x_i}{x_i}} \qquad \text{pre } i = 1,2,\ldots,m$$

kde

$y = f(x_1,\ldots,x_m) = f(\mathbf{x})$ **je produkčná funkcia a vektor**

$\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_m)$ predstavuje objemy spotreby *m variabilných vstupov.*

Dlhodobé výnosy firmy

a) Elasticita výstupu vo vzťahu ku všetkým variabilným vstupom x_i, *kde i je index variabilného vstupu, je väčšia ako 1:*

$e_q(x_i) > 1 \qquad \text{pre } \forall\, i$

t. j. výstup rastie rýchlejšie ako každý zo vstupov, napr. zdvojnásobenie všetkých vstupov má za následok viac ako zdvojnásobenie výstupu. Hovoríme o **rastúcej miere výnosov.**

b) Elasticita výstupu vo vzťahu ku všetkým variabilným vstupom x_i *je menšia ako 1:*

$e_q(x_i) < 1 \qquad \text{pre } \forall\, i$

t. j. výstup rastie pomalšie ako každý zo vstupov, napr. zdvojnásobenie všetkých vstupov má za následok menej ako zdvojnásobenie výstupu. Hovoríme o **klesajúcej miere výnosov.**

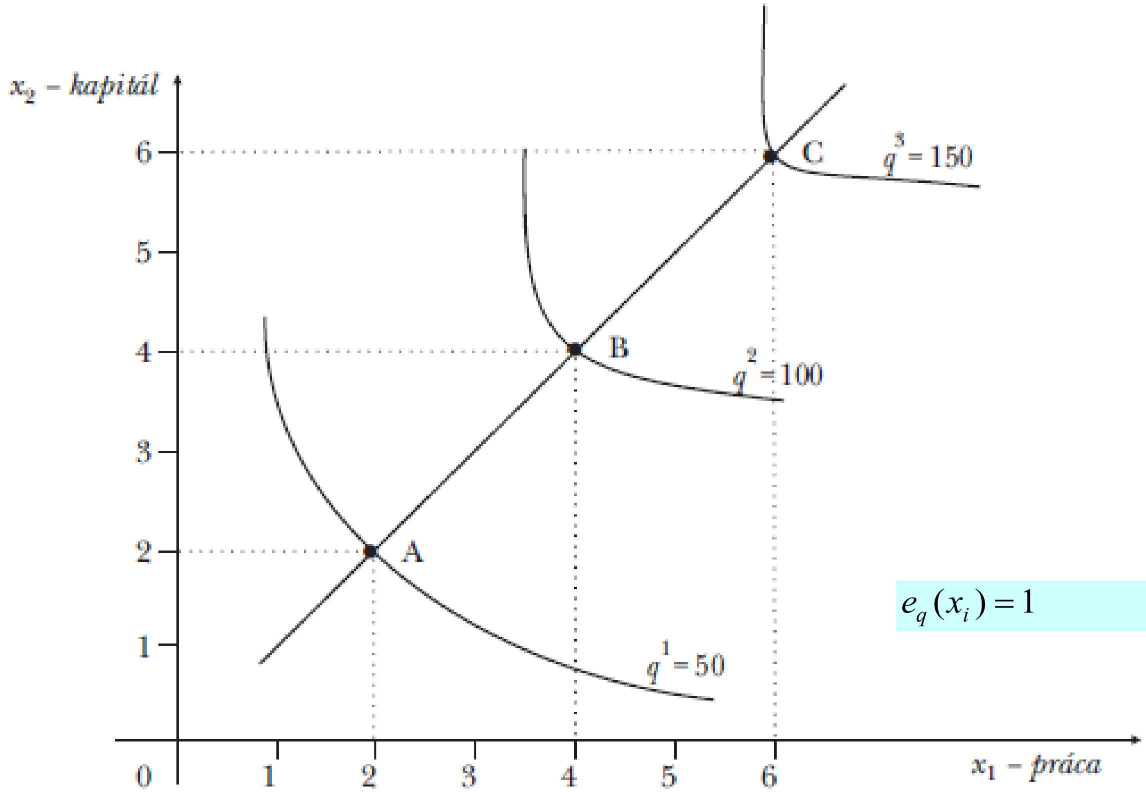
c) Elasticita výstupu vo vzťahu ku všetkým variabilným vstupom x_i *sa rovná 1:*

$e_q(x_i) = 1 \qquad \text{pre } \forall\, i$

t. j. výstup rastie takým istým tempom ako každý zo vstupov, napr. zdvojnásobenie všetkých vstupov má za následok zdvojnásobenie výstupu. Hovoríme o **konštantnej miere výnosov.**

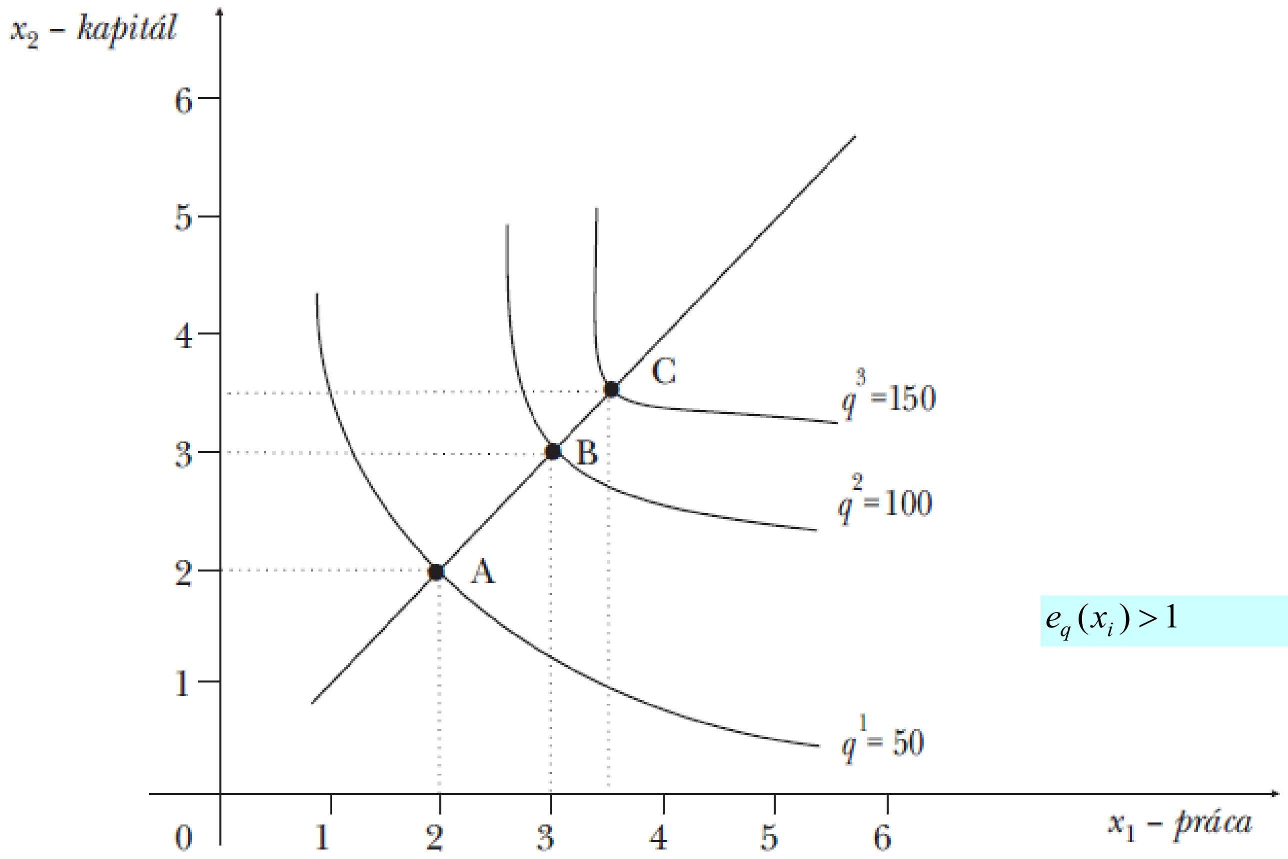
Dlhodobé výnosy firmy

Konštantná miera výnosov



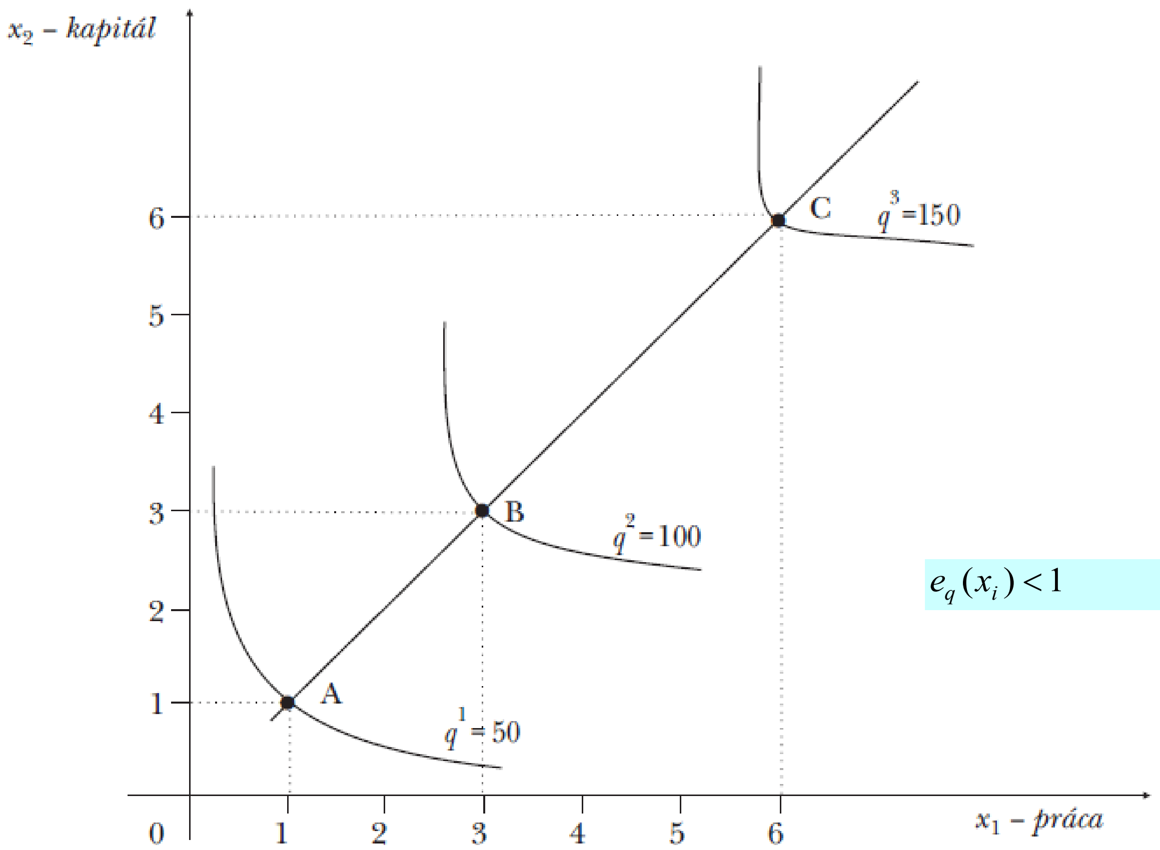
$e_q(x_i) = 1 \quad \text{pre } \forall\, i$

Rastúca miera výnosov



$e_q(x_i) > 1 \qquad \text{pre } \forall\ i$

Klesajúca miera výnosov



$e_q(x_i) < 1 \qquad \text{pre } \forall\, i$