Modely a metódy lineárneho a celočíselného programovania

(Tézy k prenáške č. 11)

Téma prednášky

Dekompozičné prístupy pre riešenie úloh lineárneho programovania

Prof. Dr. Michal Fendek

Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Ekonomická univerzita Bratislava

Dolnozemská 1

852 35 Bratislava

Dispozícia ekonomického problému:

Model optimalizácie výrobnej stratégie koncernu

- Koncern K pozostáva z k divízií D_p pre $p=1, \ldots, k$, ktoré sú relatívne samostatné.

- Každá divízia koncernu má svoju individuálnu výrobnú stratégiu zodpovedajúcu n_p výrobkom a reprezentovanú vektorom

$$\boxed{\mathbf{x}^p = \left(x_1^p, x_2^p, \ldots, x_{n_p}^p\right)}$$

  a jednotlivé výrobky predáva za trhové ceny prezentované vektorom

$$\boxed{\mathbf{c}^p = \left(c_1^p, c_2^p, \ldots, c_{n_p}^p\right)}$$

- Jednotlivé divízie usilujú o efektívne využitie m_p výrobných faktorov VF_i^p pre $i=1, \ldots, m_p$. Disponibilné zásoby jednotlivých výrobných faktorov sú popísané vektorom zdrojov

$$\boxed{\mathbf{b}^p = \left(b_1^p, b_2^p, \ldots, b_{m_p}^p\right)}$$

  a normy spotreby jednotlivých výrobných faktorov príslušnej divízie sú popísané maticou

$$\boxed{\mathbf{D}^p = \begin{pmatrix} d_{11}^p & d_{12}^p & \cdots & d_{1n_p}^p \\ d_{21}^p & d_{22}^p & \cdots & d_{2n_p}^p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{m_p1}^p & d_{m_p2}^p & \cdots & d_{m_pn_p}^p \end{pmatrix} \qquad p = 1, \ldots, k}$$

Dekompozičné prístupy

- Koncern okrem toho poskytuje m_0 výrobných faktorov VF_i^{O} pre i=1, ..., m_{O}, ktoré spoločne využívajú všetky divízie koncernu a ktorých disponibilné zásoby sú dané vektorom

$$\boxed{\mathbf{b}^0 = \left(b_1^0, b_2^0, \ldots, b_{m_0}^0\right)}$$

pričom normy spotreby spoločných výrobných faktorov pre jednotlivé divízie sú popísané maticami

$$\boxed{\mathrm{A}^p = \begin{pmatrix} a_{11}^p & a_{12}^p & \cdots & a_{1n_p}^p \\ a_{21}^p & a_{22}^p & \cdots & a_{2n_p}^p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m_0 1}^p & a_{m_0 2}^p & \cdots & a_{m_0 n_p}^p \end{pmatrix} \quad p = 1, \ldots, k}$$

Všeobecná formulácia úlohy lineárneho programovania s dekompozičnou štruktúrou

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{k} \mathbf{c}^{pT}\mathbf{x}^{p} \to \max$$

pri ohraničeniach

$$\sum_{p=1}^{k} \mathbf{A}^{p}\mathbf{x}^{p} \le \mathbf{b}^{0}$$

$$\mathbf{D}^{p}\mathbf{x}^{p} \le \mathbf{b}^{p} \qquad p = 1,\ldots,k$$

$$\mathbf{x}^{p} \ge \mathbf{0} \qquad p = 1,\ldots,k$$

pričom

k – počet divízií

p – index divízie, p=1,...,k

m_0 – počet väzbových ohraničení koncernu

m_p – počet ohraničení p-tej divízie, p=1,...,k

n_p – počet premenných p-tej divízie, p=1,...,k

$\mathbf{c}^{\mathbf{p}} = [c_j^p]$, vektor koeficientov účelovej funkcie p - tej divízíe, p=1,...,k, , j=1,...,n_p

$\mathbf{x}^{\mathbf{p}} = [x_j^p]$, vektor rozhodovacích premenných p - tej divízíe, p=1,...,k, j=1,...,n_p

$\mathbf{A}^{\mathbf{p}} = [a_{ij}^p]$, matica koeficientov väzbovej sústavy ohraničení p-tej divízíe, p=1,...,k, i=1,...,m_0, j=1,...,n_p

$\mathbf{D}^{\mathbf{p}} = [d_{ij}^p]$, matica koeficientov sústavy ohraničení p - tej divízíe, p=1,...,k, i=1,...,m_p, j=1,...,n_p

$\mathbf{b}^{\mathbf{0}} = [b_i^0]$, vektor koeficientov pravej strany väzbovej sústavy ohraničení, i=1,...,m_0,

$\mathbf{b}^{\mathbf{p}} = [b_i^p]$, vektor koeficientov pravej strany p - tej divízíe, p=1,...,k, i=1,...,m_p, resp. v analytickom tvare

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{1\mathrm{T}}\mathbf{x}^1 + \mathbf{c}^{2\mathrm{T}}\mathbf{x}^2 + \ldots + \mathbf{c}^{k\mathrm{T}}\mathbf{x}^k \to \max$$

pri ohraničeniach

$$\begin{array}{lllll}
\mathbf{A}^1\mathbf{x}^1 + & \mathbf{A}^2\mathbf{x}^2 + & \ldots + & \mathbf{A}^k\mathbf{x}^k & \le \mathbf{b}^0 \\
\mathbf{D}^1\mathbf{x}^1 & & & & \le \mathbf{b}^1 \\
 & \mathbf{D}^2\mathbf{x}^2 & & & \le \mathbf{b}^2 \\
\cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\
 & & & \mathbf{D}^p\mathbf{x}^p & \le \mathbf{b}^p \\
 & & & \mathbf{x}^{\mathbf{p}} & \ge \mathbf{0} \qquad p = 1,\ldots,k
\end{array}$$

počet ohraničení úlohy : $m_0 + \sum_{p=1}^{k} m_p$

počet premenných úlohy : $\sum_{p=1}^{k} n_p$

resp. v zložkovom tvare

$$f\left(\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^2,\ldots,\mathbf{x}^k\right)=\sum_{p=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n_k} c_j^p x_j^p\right)\rightarrow \max \qquad \mathbf{(1)}$$

pri ohraničeniach

$$\sum_{p=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n_k} a_{ij}^p x_j^p\right)\leq b_i^0 \qquad i=1,\ldots,m_0 \qquad \mathbf{(2)}$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} d_{ij}^p x_j^p \leq b_i^p \qquad p=1,\ldots,k,\ \ i=1,\ldots,m_p \qquad \mathbf{(3)}$$

$$x_j^p \geq 0 \qquad p=1,\ldots,k,\ \ j=1,\ldots,n_p \qquad \mathbf{(4)}$$

Rozmer úlohy :

$$\left(m_0+\sum_{p=1}^{k} m_p\right)\times\sum_{p=1}^{k} n_p$$

Dva aspekty riešenia problému

1. Numerický – redukcia rozmerov úlohy
2. Vecný (ekonomický) – dialóg medzi koncernom a podriadenými divíziami

Idea algoritmu

a) Budeme skúmať množiny prípustných riešení parciálnych úloh divízií
b) Množina prípustných riešení D^p jedenotlivých divízií je konvexná a polyedrálna, čiže platí

$$\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in D \Rightarrow \lambda \mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\mathbf{x}^2 \in D \quad \lambda \in \langle 0,1 \rangle$$

c) Každá divízia navrhne minimálne jednu svoju efektívnu výrobnú stratégiu, túto informáciu poskytne koncernu
d) Koncern navrhnuté riešenie alebo akceptuje, alebo upozorní na jeho nedostatky a doporučí divízii jeho korekciu
e) Proces sa opakuje dovtedy, kým jednotlivé divízie neidentifikujú také parciálne riešenia, ktoré
   1. sú pre koncern akceptovateľné
   2. optimalizujú realizáciu globálneho cieľa koncernu

Dekompozičný algoritmus D-W

A. Inicializačná etapa
(Špecifikácia východiskových prípustných riešení subproblémov – divízií)

• pre každú divíziu D^p sa formuluje množina akceptovateľných výrobných stratégií

$$\Omega^p = \left\{ \mathbf{x}^{pr} \,\middle|\, \mathbf{D}^p \mathbf{x}^{pr} \le \mathbf{b}^p, \mathbf{x}^{pr} \ge 0, p = 1, \ldots, k; r = 1, \ldots, q_p \right\}$$

r **– index navrhovanej východiskovej výrobnej stratégie *p* – tej divízie**
q_p – počet východiskových výrobných stratégií *p* – tej divízie

Poznámky:

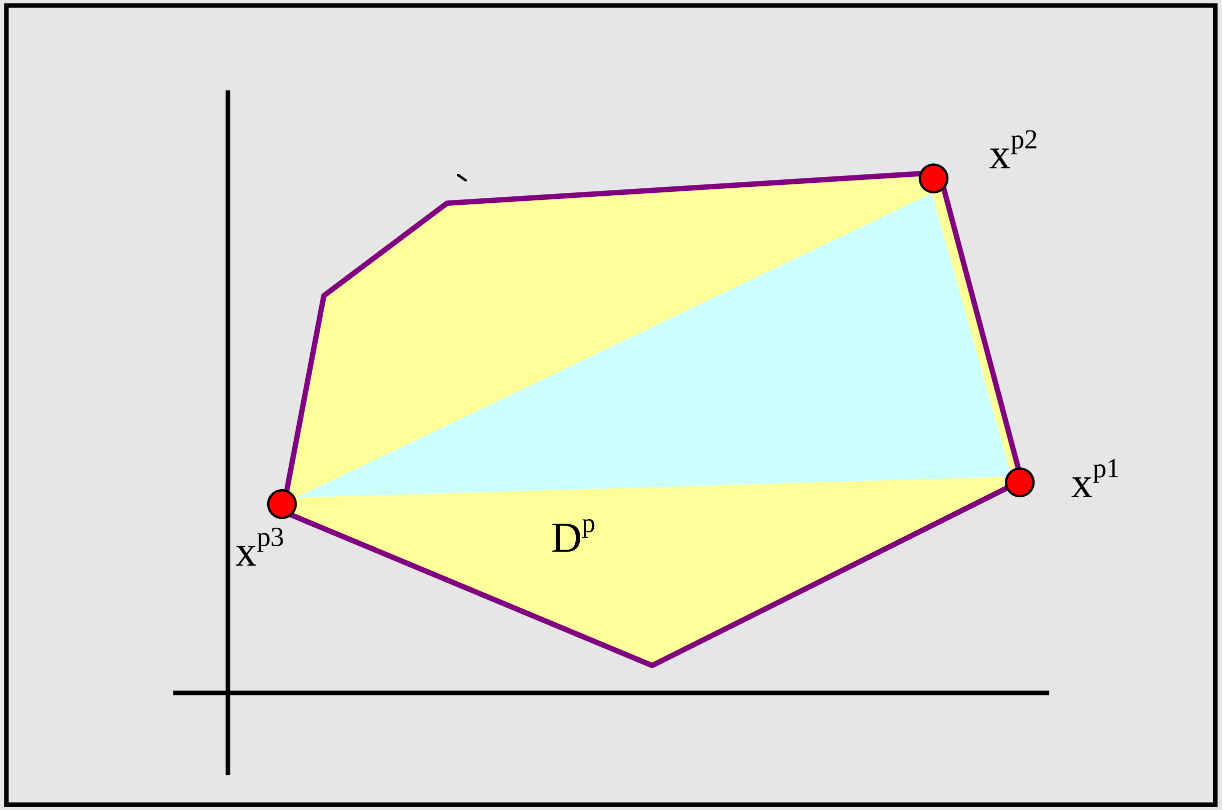
1. Každá divízia D^p formuluje aspoň jednu výrobnú stratégiu, t. j.

$$\Omega^p \ne \emptyset$$

2. Každá stratégia $\mathbf{x}^{pr} \in \Omega^p, r = 1, \ldots, q_p$ je prípustnou stratégiou divízie D^p vzhľadom na podmienky (3),(4)

Preskúmajme divíziu D^p

$$\Omega^p = \left\{ \mathbf{x}^{pr} \middle| \mathbf{D}^p \mathbf{x}^{pr} \le \mathbf{b}^p, \mathbf{x}^{pr} \ge 0,\ p = 1, \ldots, k; r = 1, \ldots, q_p \right\}$$



$$\mathbf{x}^p = \sum_{r=1}^{q_p} \lambda_{pr} \mathbf{x}_{pr}$$

B. Základná etapa –

(realizuje sa v iteratívnych cykloch dialógu medzi koncernom a jeho divíziami)

Krok 1

Na základe poskytnutých riešení divízií formuluje koncern úlohu centra v tvare

$$F\left(\lambda_{pr}\right)=\sum_{p=1}^{k}\mathbf{c}^{pT}\sum_{r=1}^{q_p}\lambda_{pr}\mathbf{x}^{pr}\rightarrow \max \qquad (5)$$

pri ohraničeniach

$$\sum_{p=1}^{k}\mathbf{A}^{p}\sum_{r=1}^{q_p}\lambda_{pr}\mathbf{x}^{pr}\leq \mathbf{b}^{0} \qquad (6)$$

$$\sum_{r=1}^{q_p}\lambda_{pr}=1 \qquad p=1,\ldots,k \qquad (7)$$

$$\lambda_{pr}\geq 0 \qquad r=1,\ldots,q_p,\ p=1,\ldots,k \qquad (8)$$

Rozmer úlohy :

$$\left(m_0+k\right)\times\sum_{p=1}^{k}q_p$$

A po úprave dostávame

$$F\left(\lambda_{pr}\right)=\sum_{p=1}^{k}\ \sum_{r=1}^{q_p}\lambda_{pr}\mathbf{c}^{pT}\mathbf{x}^{pr}\rightarrow \max \qquad \textbf{(9)}$$

pri ohraničeniach

$$\sum_{p=1}^{k}\ \sum_{r=1}^{q_p}\lambda_{pr}\mathbf{A}^{p}\mathbf{x}^{pr}\leq \mathbf{b}^{0} \qquad \textbf{(10)}$$

$$\sum_{r=1}^{q_p}\lambda_{pr}=1 \qquad p=1,\ldots,k \qquad \textbf{(11)}$$

$$\lambda_{pr}\geq 0 \qquad r=1,\ldots,q_p,\ p=1,\ldots,k \qquad \textbf{(12)}$$

Rozmer úlohy :

$$\boxed{\left(m_0+k\right)\times\sum_{p=1}^{k}q_p}$$

Krok 2

Zaveďme substitúcie

a) $w_{pr} = \mathbf{c}^{pT}\mathbf{x}^{pr} \qquad p = 1,\dots,k \quad r = 1,\dots,q_p$

b) $\mathbf{P}^{pr} = \mathbf{A}^{p}\mathbf{x}^{pr} \qquad p = 1,\dots,k \quad r = 1,\dots,q_p$

Dostávame úplnu hlavnú úlohu koncernu (UHU) v tvare

$$F(\lambda_{pr}) = \sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{q_p} w_{pr}\lambda_{pr} \to \max \qquad \textbf{(13)}$$

pri ohraničeniach

$$\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{q_p} \mathbf{P}^{pr}\lambda_{pr} \le \mathbf{b}^0 \qquad \textbf{(14)}$$

$$\sum_{r=1}^{q_p} \lambda_{pr} = 1 \qquad p = 1,\dots,k \qquad \textbf{(15)}$$

$$\lambda_{pr} \ge 0 \qquad r = 1,\dots,q_p,\ p = 1,\dots,k \qquad \textbf{(16)}$$

DUÁLNA ÚLOHA DU_UHU k primárnej úlohu PU_UHU má analytický tvar

$$\boxed{g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{1=1}^{m_0} u_i b_i^0 + \sum_{p=1}^{k} v_p \rightarrow \min} \qquad (17)$$

pri ohraničeniach

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m_0} u_i p_i^{pr} + v_p \geq w_{pr} \qquad p = 1,\ldots,k \quad r = 1,\ldots,q_p} \qquad (18)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_i \geq 0 & i = 1,,\ldots,m_0, \\ v_p \in R & p = 1,\ldots,k \end{array}} \qquad (19)$$

Maticový tvar DU_UHU

$$g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T\mathbf{b}^0 + \sum_{p=1}^{k} v_p \rightarrow \min$$

$$\mathbf{u}^T\mathbf{P}_{pr} + v_p \geq w_{pr} \qquad p = 1,\ldots,k \quad r = 1,\ldots,q_p$$

$$\mathbf{u} \geq 0\,, \mathbf{u} \in R^{m_0}\,, \mathbf{v} \in R^k$$

Krok 3
Riešením primárnej úlohy PU-UHU získame optimálne riešenia

- primárnej UHU $\boldsymbol{\lambda}^* \in R^{\sum_{p=1}^{k} q_p}$ **a potom** $\mathbf{x}^p = \sum_{r=1}^{q_p} \lambda_{pr}\mathbf{x}_r^p \quad \forall p$

- duálnej UHU $\mathbf{u}^* \geq 0\,, \mathbf{u}^* \in R^{m_0}\,, \mathbf{v}^* \in R^k$

Krok 4: Preverenie kritéria optimálnosti

Kritérium optimálnosti pre UHU má tvar

$$w_{pr} - \left(\mathbf{u}^T \mathbf{P}^{pr} + v_p\right) \leq 0 \qquad p = 1, \ldots, k \quad r = 1, \ldots, q_p$$

po úprave dostávame

$$\mathbf{c}^{pT} \mathbf{x}^{pr} - \mathbf{u}^T \mathbf{A}^p \mathbf{x}^{pr} - v_p \leq 0 \qquad p = 1, \ldots, k \quad r = 1, \ldots, q_p$$

KO: $\left(\mathbf{c}^{pT} - \mathbf{u}^T \mathbf{A}^p\right) \mathbf{x}^{pr} - v_p \leq 0 \qquad p = 1, \ldots, k \quad r = 1, \ldots, q_p$

Vyhodnotenie OR

A) Z hľadiska koncernu máme OR, pre použité výrobné stratégie (krajné body) $\mathbf{x}^{pr}$ je preto KO splnené

B) Otázka z hľadiska divízií: Nie je KO porušené pre niektorú nepoužitú výrobnú stratégiu niektorej divízie D_p

Každá divíziu túto otázku individuálne preskúma

Trend: Hľadá sa nepoužitá výrobná stratégia, ktorá najviac porušuje KO pre UHU

Nástroj: Každá divízia rieši pomocnú úlohu LP, úlohu LPD^p v tvare

$$L^p = \psi(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{c}^T - \mathbf{u}^T \mathbf{A}^p\right)\mathbf{x}^p \rightarrow \max$$

pri ohraničeniach

$$\mathbf{D}^p \mathbf{x}^p \leq \mathbf{b}^p$$

$$\mathbf{x}^p \geq \mathbf{0}$$

OR: [x^p*, L^p*]

KO divízií: Vypočítame $L^s - v^s = \max_{p=1,\dots,k} \left\{L^p - v^p\right\}$

A) $L^s - v^s = 0$ **aktuálne OR UHU je OR koncernu aj divízií**

B) $L^s - v^s > 0$ **OR pomocnej úlohy s-tej divízie LPD^s zodpovedá nepoužitej výrobnej stratégii, ktorá:**

- **najviac porušuje KO pre UHU**
- **preto je potenciálom pre zlepšenie riešenia**

Záver: OR pomocnej úlohy s-tej divízie LPD^s použijeme na rozšírenie UHU

Položíme

$q_s = q_s + 1$

$\mathbf{x}^{s\,q_s} = \mathbf{x}^{s*}$

Do UHU zavedieme nový stĺpec pre podmienky (14), (15), ktorý rozložíme v báze B* aktuálneho optimálneho riešenia a vypočítame zodpovedajúci koeficient UF (13)

$$\mathbf{B}^{*-1}\overline{\mathbf{P}}^{sq_s} = \mathbf{B}^{*-1}\begin{pmatrix}\mathbf{P}^{sq_s}\\ \mathbf{e}^{sq_s}\end{pmatrix}$$

, pričom platí

$$\mathbf{P}^{sq_s} = \mathbf{A}^{s}\mathbf{x}^{sq_s}, \quad \mathbf{e}^{sq_s} = \left[e_i^{\mathbf{e}^{sq_s}}\right]_{i=1}^{k} = \begin{cases}1 & i = s\\ 0 & i \neq s\end{cases}$$

$$w_{sq_s} = \mathbf{c}^{sT}\mathbf{x}^{sq_s}$$

Vrátime sa na Krok 1 základnej etapy