Modely a metódy lineárneho a celočíselného programovania

(Tézy k prenáške č. 10)

Téma prednášky

Bivalentné programovanie

Prof. Dr. Michal Fendek

Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Ekonomická univerzita Bratislava

Dolnozemská 1

852 35 Bratislava

Všeobecná formulácia úlohy bivalentného programovania

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow ext \in \{\min; \max\} \qquad (1)$$

Pri ohraničeniach

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\geq, \leq, =\} b_i \quad i = ,\ldots, m \qquad (2)$$

$$x_j \in D_j \qquad j = 1, \ldots, n \qquad (3)$$

pričom množina D_j má nasledovný tvar

a)

$$D_j = \{\, 0,1 \,\}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

b)

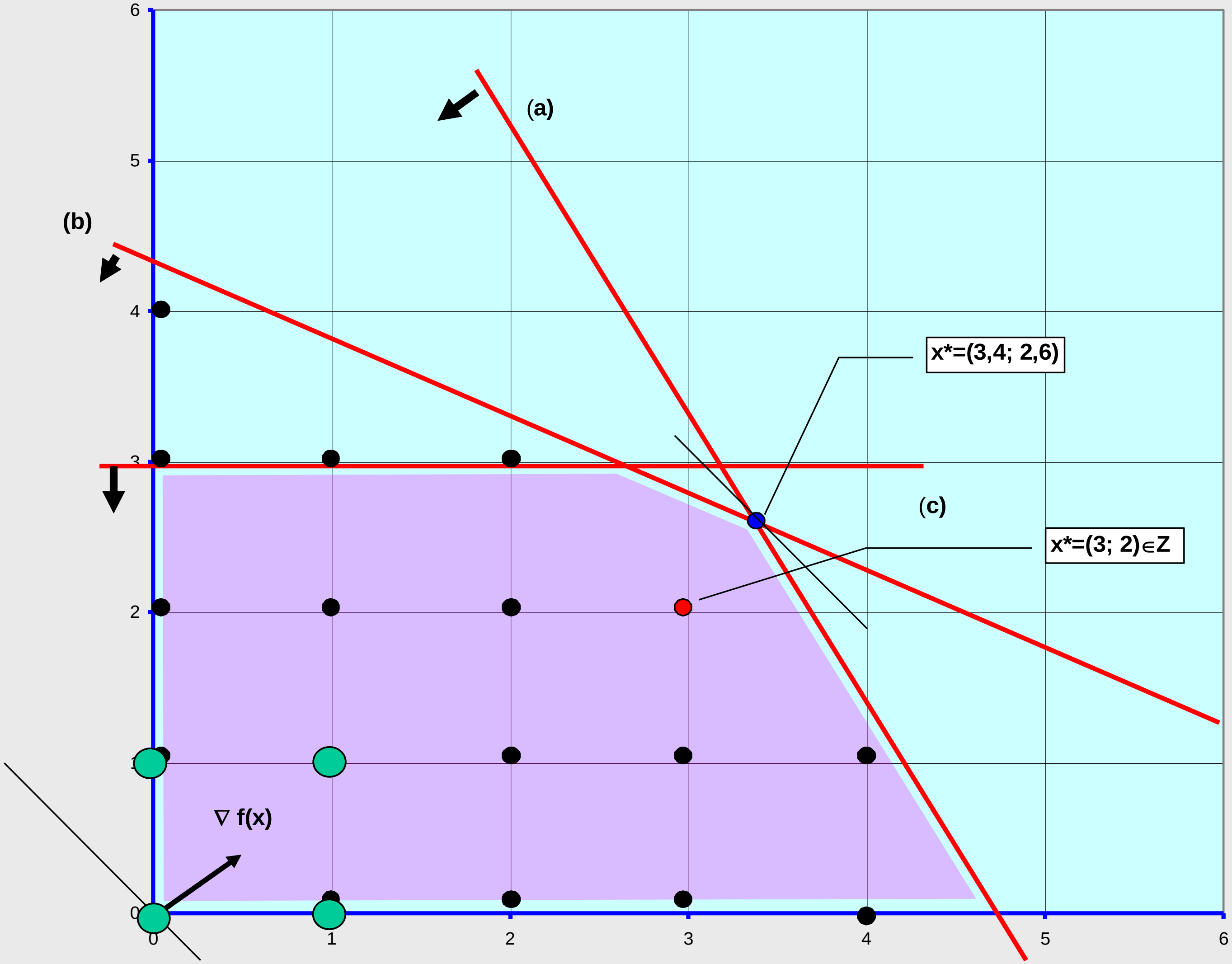
$$D_j \in \{\, 0;1 \,\}, \quad j = 1,\ldots, k; D_j = R^{\geq 0}, \quad j = k+1,\ldots, n$$

$$D_j = R^{\geq 0} = \langle 0; \infty), \qquad j = 1,\ldots, n$$

Oblasti ekonomických aplikačných problémov bivalentnného programovania

- Priraďovací problém – BiP
- Optimalizácia výberu investitčnej stratégie podniku– BiP
- Fixed Charge Problem - ZmCPaBiP
- Úloha obchodného cestujúceho - BiP
- Optimalizácia investičného rozvoja a výrobnej stratégie expandujcich divízií koncernu – ZmBiP

Bivalentné programovanie



Transformácia úlohy na štandardný tvar

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \quad c_j \geq 0 \quad j \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$$

Pri ohraničeniach

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \; x_j + s_i = b_i \qquad i \in M = \{1, 2, \ldots, m\}$$

$$x_j \in \{0,1\}, \qquad j \in N$$

$$s_i \in \langle 0, \propto), \qquad i \in M$$

Poznámka

- **Explicitná enumerácia**
  - **počet možných riešení pr =** $V_2^{'}(n) = 2^n$
  - **napr. pre n=3 pr=8, pre n=20 pr=1 048 570**
- **Implicitná enumerácia**

Je daná úloha bivalentného programovania v tvare

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 \to \min$$

$$p.o.$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 \qquad\quad + 2x_4 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 &\geq 2 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 &\leq 3 \\ x_j &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

neobsadené

Parciálne riešenie J= {3,-1} x_p = (0, _ , 1, _) má 2 fixované premenné x_1, x_3

Doplnok parciálneho riešenia J x_d = (0 , 0 , 1 , 1) je množina D={-2, 4}

Počet doplnkov: ak má úloha n premených a parciálne riešenie PR má množinu indexov fixovných premenných J = { ……..} s q indexami

Tak k parciálnemu riešeniu existuje spolu 2^{n-q} doplnkov

Ak teda preskúmame PR s p fixovanými premennými,

tak implicitne preskúmame 2^{n-p} doplnkov

●● Explicitná enumerácia

●● Implicitná enumerácia

Egon Balas – aditívny algoritmus

M.A. Geoffrion – algoritmus IE

Bivalentné programovanie

J(p)

J (p) fixovaných premenných "1", alebo "0"

K ParR J(p) existuje 2^{n-p} dplnkov

J(p+1)

J (p+1) fixovaných premenných "1", alebo "0"

K ParR J(p+1) existuje 2^{n-p-1} doplnkov

J(p+2) fixovaných premenných "1", alebo "0"

J(p+2)

Ak sme v konkrétnom uzle identifikovali tzv. ***"Koncový uzol"***, tak alebo

- **Neexistuje prípustný doplnok k ParR J(p+2),** alebo
- **Hodnota účelovej funkcie sa nedá zlepšiť,** alebo
- **ParR J(p+2) je prípustným parciálnym riešením**

Algoritmus implicitnej enumerácie

Inicializačná etapa

k=0; J_k=Ø; z_k= 0; $z_H = \infty$ (pesimistický odhad)

II. Základná etapa

Krok 1° Otázka: Je aktuálne ParR J_k aj prípustné riešenie úlohy?

- **Množina indexov ParR J_k implikuje vektor riešenie $x^k = [x^k_j \in \{0,1\}]$ pre $j \in J_k$**
- **Vypočíteme**

$$z^k = \sum_{j \in J_k \wedge j>0} c_j$$

$$s_i^k = b_i - \sum_{j \in J_k \wedge j>0} a_{ij}$$

1a) $s_i^k \geq 0$ pre všetky $i \in M \rightarrow$ aktuálne ParR je prípustné, všetky jeho doplnky sú tým implicitne preskúmané a pokračujeme na krok 4° (a potom Spätný chod)

1b) $s_i^k \sim\geq 0$ pre všetky $i \in M \rightarrow$ aktuálne ParR je neprípustné, budeme analyzovať jeho doplnky, pokračujeme na krok 2° (Testovacia procedúra doplnkov)

Bivalentné programovanie

Krok 2° **Existuje prípustný doplnok D^k k parciálnemu riešeniu J^k ?**

Sústava troch eliminačných testov

TEST 1 – Otázka: Existujú premenné, ktorých zavedenie do aktuálneho parciaálneho riešenia s hodnotou „1“ neznížia neprípustnosť ani jednej doplnkovej premennej $s_i^k < 0$

$$\boxed{E_k = \left\{ j \in N \setminus J_k \middle| a_{ij} \geq 0 \quad pre \quad \forall i : s_i^k < 0 \right\}}$$

$$\boxed{T_k^1 = N \setminus J_k \setminus E_k}$$

Potom

a) $T_k^1 = \emptyset$ → ParR J_k považujeme za preskúmané, t.j neexistuje ani jeden kandidát (premenná) pre tvorbu doplnku, pokračujeme na SCH 5°

b) $T_k^1 \neq \emptyset$ → ParR J_k považujeme za nepreskúmané, t.j existuje vhodný kandidát (premenná) $j \in T_k^1$ pre tvorbu doplnku, pokračujeme na TEST 2

TEST 2 – Otázka: Existujú vhodný kandidát pre doplnok (premenná), ktorej zavedenie do aktuálneho parciaálneho riešenie s hodnotou „1“ zlepší hodnotu účelovej funkcie

$$\boxed{B_k = \left\{ j \in T_k^1 \middle| z_k + c_j \geq z_h \right\}}$$

$$\boxed{T_k^2 = T_k^1 \setminus B_k}$$

Potom

a) $T_k^2 = \emptyset$ → ParR J_k považujeme za preskúmané, t.j neexistuje ani jeden kandidát (premenná) pre tvorbu doplnku, pokračujeme na SCH 5°

b) $T_k^2 \neq \emptyset$ → ParR J_k považujeme za nepreskúmané, t.j existuje vhodný kandidát (premenná) $j \in T_k^1$ pre tvorbu doplnku, pokračujeme na TEST 3

TEST 3 – Otázka: Existujú taká doplnková premenná s_i^k , ktorá po uplatnení akéhokoľvek vhodného kandidáta alebo ich kombinácie pre doplnok zostáva naďalej neprípustná, t. j. platí $s_i^k < 0$

$$C_k = \left\{ i \in M \,\middle|\, s_i^k < 0 : \sum_{j \in T_k^2} \min \left(a_{ij}, 0 \right) > s_i^k \right\}$$

Potom

a) $C_k \neq \emptyset$ → ParR J_k považujeme za preskúmané, t.j neexistuje ani jeden doplnok umožňujúci odstrániť neprípustnosť doplnkovej premennej $s_i^k < 0$, pokračujeme na spätný chod SCH 5°

b) Ck=Ø → ParR J_k považujeme za nepreskúmané, t.j existuje prípustný doplnok k ParR J_k a platí

$$J_{k+1} = J_k \cup \left\{ "q" \in T_k^2 \right\}, \quad "q" \equiv ?$$

pokračujeme na Krok 3°

Bivalentné programovanie

Krok 3 – Určenie nasledujúceho ParR J_{k+1}

- **Vyberieme $j \in T_k^2 = q$ také, ktoré implikuje najnižšiu zostatkovú mieru neprípustnosti doplnkových premenných, t. j. zdpovedá**

$$\max s_i^k < 0$$

$$v_j = \sum_{i \in M} \min\left(0, s_i^k - a_{ij}\right) \quad pre \quad \forall j \in T_k^2$$

$$v_q = \max_{j \in T_k^2} \left\{ v_j \right\}$$

Potom

Určíme nové ParR J_{k+1}

$$\boxed{J_{k+1} = J_k \cup \left\{ q \in T_k^2 \right\}}$$

položíme $k = k+1$

pokračujeme na Krok 1°

Bivalentné programovanie

Krok 4 – Archivácia prípustného ParR J_k

$$\boxed{\begin{array}{l} s_i^k \geq 0 \quad \forall i \in M \Rightarrow J_k, \mathbf{x}^k \ldots PR \\ ak \quad z_H > z_k \quad \Rightarrow \quad z_H = z_k \end{array}}$$

najlepšieho doposiaľ identifikovaného riešenia

$$\boxed{J^* = J_k, \quad z^* = z_H = z_k}$$

pokračujeme na Krok 5°

Krok 5 – Spätný chod (návrat na zatiaľ v dôsledku subjektívnej voľby cesty vetvenia „nepreskúmané“ riešenia)

5a) $J_k = \emptyset \rightarrow$ implicitne sme preskúmali všetky prípustné riešenia úlohy

a1) $z_H = \infty \rightarrow$ *úloha NEMÁ PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE stop*

a2) $z_H \neq \infty \rightarrow$ *úloha MÁ OPTIMÁLNE RIEŠENIE: J^*, z^* stop*

5b) $J_k \neq \emptyset \rightarrow$ AKTIVNY SPATNY CHOD

- Vytvoríme množinu J“ indexov množinu J_k, ktoré zodpovedajú premenným s hodnotou „1“

(sú to de facto indexy množiny J_k s kladnými znamienkami)

$$\boxed{J" = \left\{ j \in J_k \,\middle|\, j > 0 \right\}}$$

-potom vyberieme z množiny J“ index takej premennej aktuálneho riešenia J_k ktorá po vynulovaní svojej hodnoty spôsobí „najmenšiu“ neprípustnosť doplnkových premenných

$$s_i^k < 0$$

Bivalentné programovanie

- vyberieme z množiny J“ index takej premennej aktuálneho riešenia J $_k$ ktorá implikuje „najmenšiu“ celkovú neprípustnosť všetkých doplnkových

$$\boxed{\begin{aligned} w_j &= \sum_{i\in M} \min\left(0, s_i^k + a_{ij}\right) \; pre \quad \forall j \in J'' \\ w_q &= \max_{j\in J''} \{v_j\} \Rightarrow \left(-q \in J''\right) \end{aligned}}$$

potom

$$\boxed{J_{k+1} = J_k \cup \{-q\}}$$

návrat na Krok 1°