

Modely a metódy lineárneho a celočíselného programovania

(Tézy k prenáške č. 9)

Téma prednášky

Celočíselné programovanie

Gomoryho algoritmus

Prof. Ing. Michal Fendek, PhD.

Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Ekonomická univerzita Bratislava

Dolnozemská 1

852 35 Bratislava

Všeobecná formulácia úlohy celočíselného programovania

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{ext} \in \{\min; \max\} \quad (1)$$

Pri ohraničeniach

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \geq, \leq, = \} b_i \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$x_j \in D_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3)$$

pričom množina D_j môže mať napr. nasledovný tvar

$$D_j = Z^{\geq 0} = \langle 0; \infty \rangle \wedge \text{celo č.}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$D_j = \{ 0, 1 \}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$D_j = Z^{\geq 0}, \quad j = 1, \dots, k; D_j = R^{\geq 0}, \quad j = k + 1, \dots, n$$

$$D_j \in \{ 0; 1 \}, \quad j = 1, \dots, k; D_j = R^{\geq 0}, \quad j = k + 1, \dots, n$$

$$D_j = R^{\geq 0} = \langle 0; \infty \rangle, \quad j = 1, \dots, n$$

Oblasti ekonomických aplikačných problémov celočíselného programovania

- Optimalizácia voľby výrobných stratégií firmy s kusovou výrobou. - CP
- Dopravný problém- CP
- Prirad'ovací problém – BiP
- Optimalizácia výberu investičnej stratégie podniku– BiP
- Fixed Charge Problem - ZmCP
- Úloha obchodného cestujúceho - BiP
- Optimalizácia investičného rozvoja a výrobných stratégií expandujúcich divízií koncernu – ZmBiP

Gomoryho postoptimalizačný algoritmus pre riešenie úloh celočíselného programovania

Preskúmame úlohu celočíselného programovania (1) v tvare

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max \\ \mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \in Z \end{aligned} \tag{1}$$

Ideová schéma Gomoryho algoritmu

I. Inicializácia

Riešme úlohu (1) bez podmienky $\mathbf{x} \in Z$

- OR: $\mathbf{x}^*, f(\mathbf{x}^*)$, $\mathbf{x}^* \in D_0 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

I.a) $\mathbf{x}^* \in Z \rightarrow \text{Stop}$

I.b) $\mathbf{x}^* \notin Z \rightarrow \text{II}$

II. Konštrukcia Gomoryho reznej nadroviny

$$1. \quad 0 \leq x_{i0} = r_{i0} + n_{i0}, \quad \forall i$$

$$n_{i0} \in \mathbb{Z}$$

$$r_{i0} \in \langle 0, 1 \rangle$$

stanovíme:

$$r_{L0} = \max_j \{ r_{i0}, \} \Rightarrow$$

$$x_{Lj} = r_{Lj} + n_{Lj}, \quad r_{Lj} \in \langle 0, 1 \rangle, \quad n_{Lj} \in \mathbb{Z}$$

2. L-tý riadok simplexovej tabuľky je potom generujúcim riadkom Gomoryho reznej nadroviny v tvare

$$\sum_j (-r_{Lj})x_j \leq -r_{L0}$$

$$\sum_j (-r_{Lj})x_j + s_L = -r_{L0}$$

Podmienku reznej nadroviny doplníme do simplexovej tabuľky aktuálneho riešenia a pokračujeme podľa duálneho algoritmu simplexovej metódy

Návrat na krok Ia

Príklad pre Gomoryho algoritmus

$$f(x_1, x_2) = 80x_1 + 90x_2 \rightarrow \max$$

pri ohraničeniach

$$10x_1 + 5x_2 \leq 47$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 43$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \in \mathbb{Z}$$

Riešenie: I. Fáza

$$f(x_1, x_2) = 80x_1 + 90x_2 \quad \rightarrow \max$$

p.o.

$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 + s_1 &= 47 \\ 5x_1 + 10x_2 + s_2 &= 43 \\ x_2 + s_3 &= 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tab.1 (1. Iterácia)

	$f(x_1, x_2)$	80	90	0	0	0	
x_B	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	0	10	5	1	0	0	47
s_2	0	5	10	0	1	0	43
$\leftarrow s_3$	0	0	1•	0	0	1	3
	r_j^I	80	90↑	0	0	0	0

Tab.2 (2. Iterácia)

	$f(x_1, x_2)$	80	90	0	0	0	
\mathbf{x}_B	\mathbf{c}_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	0	10	0	1	0	-5	32
$\leftarrow s_2$	0	•5	0	0	1	-10	13
x_2	90	0	1	0	0	1	3
	r_j	$\uparrow 80$	0	0	0	-90	270

Charakteristika riešenia

$$B = (\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5) \quad \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3) = (0 \quad 3 \quad 32 \quad 13 \quad 0)$$

$$f(x) = 270$$

$$(r_j) = \left(\underbrace{80}_{\max} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -90 \right) \sim \leq 0$$

Tab.3 (3. Iterácia)

	$f(x_1, x_2)$	80	90	0	0	0	
\mathbf{x}_B	\mathbf{c}_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
$\leftarrow s_1$	0	0	0	1	-2	•15	6
x_1	80	1	0	0	1/5	-2	2,6
x_2	90	0	1	0	0	1	3
r_j		0	0	0	-16	↑70	478

Charakteristika riešenia

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) \quad \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3) = (2,6 \quad 3 \quad 6 \quad 0 \quad 0)$$

$$f(\mathbf{x}) = 478$$

$$(r_j) = \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & -16 & \underbrace{70}_{\max} \end{array} \right) \sim \leq 0$$

Tab.4 (4. Iterácia)

	$f(x_1, x_2)$	80	90	0	0	0	
\mathbf{x}_B	\mathbf{c}_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	\mathbf{b}
s_3	0	0	0	1/15	-2/15	1	0,4
x_1	80	1	0	2/15	-1/15	0	3,4
x_2	90	0	1	-1/15	2/15	0	2,6
	r_j	0	0	-70/15	-100/15	0	478

Charakteristika riešenia

$$B = (\mathbf{A}_5, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) \quad \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3) = (3,4 \quad 2,6 \quad 0 \quad 0 \quad 0,4)$$

$$f(\mathbf{x}) = 506$$

$$(r_j) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad -70/15 \quad -100/15) \leq 0$$

Stop prvej etapy ... **Neceločíselné optimálne riešenie**

II. Etapa Gomoryho algoritmus

Celočíselné programovanie

II. Etapa Gomoryho algoritmus

$$0 \leq x_{i0} = r_{i0} + n_{i0}, \quad \forall i$$

$$n_{i0} \in \mathbb{Z}$$

$$r_{i0} \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$r_{L0} = \underbrace{\max}_j \{ r_{i0}, \} \Rightarrow$$

$$x_{Lj} = r_{Lj} + n_{Lj}, \quad r_{Lj} \in \langle 0, 1 \rangle, \quad n_{Lj} \in \mathbb{Z}$$

$$f(x_1, x_2) \quad 80 \quad 90 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

XB	CB	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_3	0	0	0	1/15	-2/15	1	0,4
x_1	80	1	0	2/15	-1/15	0	3,4
x_2	90	0	1	-1/15	2/15	0	2,6 ==> GRN
r_j		0	0	-70/15	-100/15	0	506

Konštrukcia GRN

$$x_{10} = s_3 = 0,4 = r_{10} + n_{10} = 0,4 + 0$$

$$x_{20} = x_1 = 3,4 = r_{20} + n_{20} = 0,4 + 3$$

$$x_{30} = x_2 = 2,6 = r_{30} + n_{30} = 0,6 + 2$$

$$r_{L0} = \max_i \{ r_{i0} \} = \mathbf{0,6} = r_{30}$$

$$x_{31} = 0 = r_{31} + n_{31} = \mathbf{0} + 0$$

$$x_{32} = 1 = r_{32} + n_{32} = \mathbf{0} + 1$$

$$x_{33} = -\frac{1}{15} = r_{31} + n_{31} = \frac{14}{15} - 1$$

$$x_{34} = \frac{2}{15} = r_{34} + n_{34} = \frac{2}{15} + 0$$

$$x_{35} = 0 = r_{35} + n_{35} = \mathbf{0} + 0$$

$$\sum_j (-r_{Lj})x_j \leq -r_{L0}$$

$$\sum_j (-r_{Lj})x_j + s_L = -r_{L0}$$

$$-0x_1 - 0x_2 - \frac{14}{15}s_1 - \frac{2}{15}s_2 - 0s_3 \leq -0,6$$

$$-0x_1 - 0x_2 - \frac{14}{15}s_1 - \frac{2}{15}s_2 - 0s_3 + s_4 = -0,6$$

$$-0x_1 - 0x_2 - \frac{14}{15}s_1 - \frac{2}{15}s_2 - 0s_3 + s_4 = -0,6$$

$$f(x_1, x_2) \quad 80 \quad 90 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

\mathbf{x}_B	\mathbf{c}_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	\mathbf{b}
s_3	0	0	0	1/15	-2/15	1	0	6/15
x_1	80	1	0	2/15	-1/15	0	0	51/15
x_2	90	0	1	-1/15	2/15	0	0	39/15
$\leftarrow s_4$	0	0	0	-14/15	$\bullet -2/15$	0	1	-9/15
r_j		0	0	-70/15 \uparrow	-100/15	0	0	506

DASM - n

$$\max \left| \frac{-70/15}{-14/15} \right| \left| \frac{-100/15\uparrow}{-2/15} \right|$$

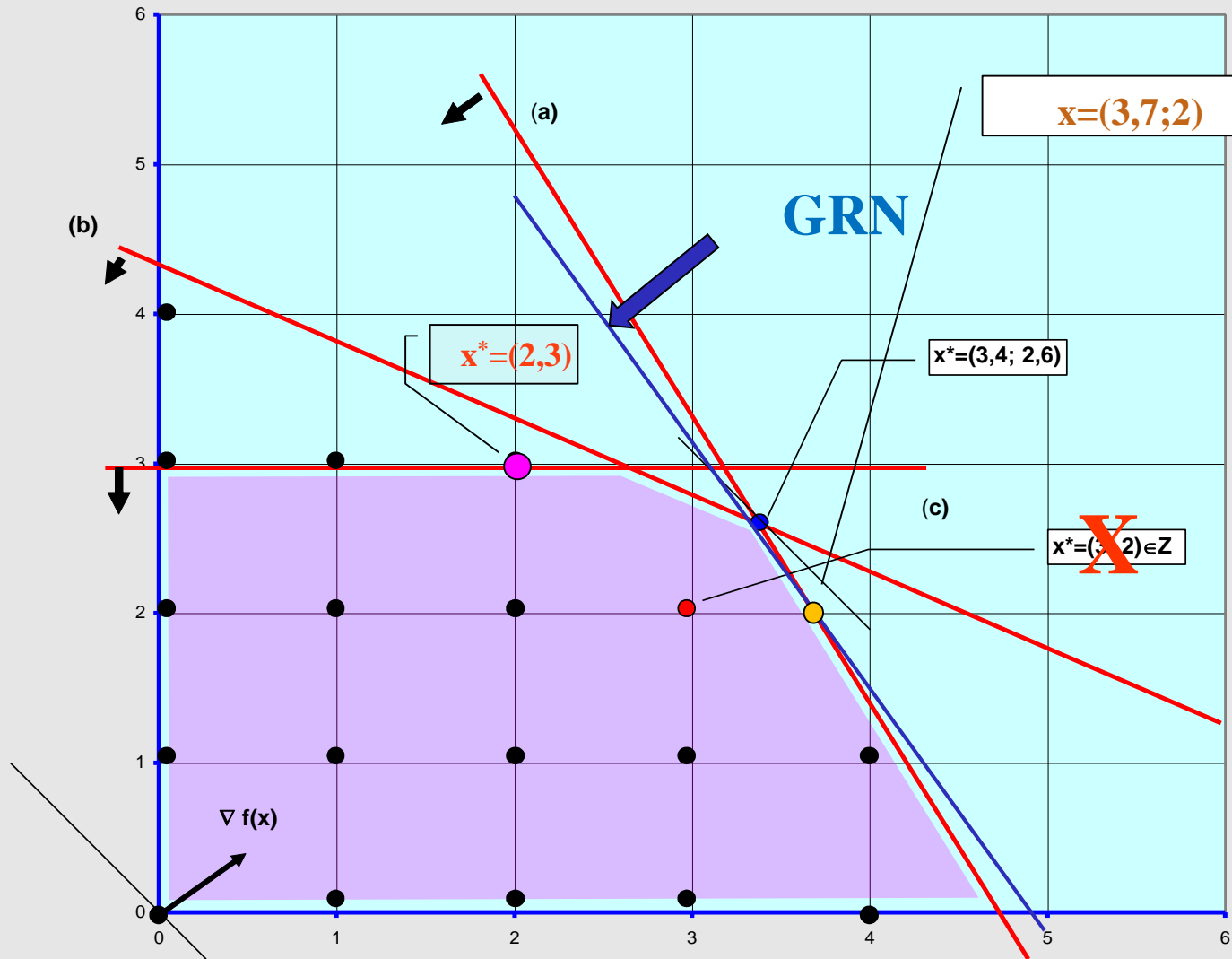
Prepočítat' !!!

Geometrická interpretácia

$$\begin{aligned} -\frac{14}{15}s_1 - \frac{2}{15}s_2 &\leq -0,6 \rightarrow \\ -14s_1 - 2s_2 &\leq -9 \\ -14(47 - 10x_1 - 5x_2) - 2(47 - 10x_1 - 5x_2) &\leq -9 \\ 160x_1 + 80x_2 &\leq 743 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 2 \\ x_2 = 2,6 + 1/15s_1 - 2/15s_2 &\leq 2 \\ 1/15s_1 - 2/15s_2 &\leq -0,6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1/15s_1 - 2/15s_2 + s_4 = -0,6 \Rightarrow \text{DASM}$$



Celočíselné programovanie

	$f(x_1, x_2)$	80	90	0	0	0	0	
\mathbf{x}_B	\mathbf{c}_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
s_3	0	0	0	1	0	1	-1	1
x_1	80	1	0	-5/15	0	0	-1/2	3,7 GRN
x_2	90	0	1	-1	0	0	0	2
s_2	0	0	1	7	1	0	-15/2	4,5
r_j		0	0	-60	0	0	-50	476

Charakteristika riešenia

$$B = (\mathbf{A}_5, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4) \quad \mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4) = (3,7 \ 2 \ 0 \ 4,5 \ 1 \ 0)$$

$$f(\mathbf{x}) = 506$$

$$(r_j) = (0 \ 0 \ -60 \ 0 \ 0 \ -50) \leq 0$$

$$x_{20} = x_1 = 3,7 = r_{20} + n_{20} = 0,7 + 3$$

$$x_{40} = s_2 = 4,5 = r_{40} + n_{40} = 0,5 + 4$$

$$r_{L0} = \max_i \{r_{i0}\} = 0,7 = r_{20}$$

$$x_{23} = -\frac{5}{15} = r_{31} + n_{31} = \frac{10}{15} - 1$$

$$x_{25} = -\frac{1}{2} = r_{25} + n_{25} = \frac{1}{2} - 1$$

$$\sum_j (-r_{Lj})x_j \leq -r_{L0}$$

$$\sum_j (-r_{Lj})x_j + s_L = -r_{L0}$$

$$-\frac{10}{15}s_1 - \frac{1}{2}s_4 \leq -0,7$$

$$-\frac{10}{15}s_1 - \frac{1}{2}s_4 + s_5 = -0,7$$

GRN

$$-\frac{10}{15}s_1 - \frac{1}{2}s_4 + s_5 = -0,7$$

$f(x_1, x_2)$ 80 90 0 0 0 0 0

$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	\mathbf{b}
s_3	0	0	0	1	0	1	-1	0	1
x_1	80	1	0	-5/15	0	0	-1/2	0	3,7
x_2	90	0	1	-1	0	0	0	0	2
s_2	0	0	1	7	1	0	-15/2	0	4,5
$\leftarrow s_5$	0	0	0	-10/15	1	0	-1/2●	1	-0,7
r_j		0	0	-90	0	0	-50↑	-50	476

$$f(x_1, x_2) \quad 80 \quad 90 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

\mathbf{x}_B	\mathbf{c}_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	\mathbf{b}
s_3	0	0	0	35/15	-2	1	0	-2	2,4
x_1	80	1	0	5/15	-1	0	0	-1	3
x_2	90	0	1	-35/15	2	0	0	2	2
s_2	0	0	1	-17	-14	0	0	-15	15
s_4	0	0	0	20/15	-2	0	1	-2	1,4
r_j		0	0	-90	0	0	0	-50	420

Charakteristika riešenia

Prepočítat' !!!

$$B = (\mathbf{A}_5, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_6) \quad \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 \quad s_4) = (3 \quad 2 \quad 0 \quad 15 \quad 2,4 \quad 1,4 \quad 0)$$

$$f(\mathbf{x}) = 420$$

$$\begin{pmatrix} r_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -90 & 0 & 0 & 0 & -50 \end{pmatrix} \leq 0$$