Modely a metódy lineárneho a celočíselného programovania

(Tézy k prenáške č. 8)

Téma prednášky

Celočíselné programovanie

Metóda vetiev a hraníc

Prof. Ing. Michal Fendek, PhD.

Katedra operačného výskumu a ekonmetrie
Ekonomická univerzita Bratislava
Dolnozemská 1
852 35 Bratislava

Všeobecná formulácia úlohy celočíselného programovania

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow ext \in \{\min; \max\} \qquad (1)$$

Pri ohraničeniach

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\geq, \leq, =\} b_i \quad i = ,\dots, m \qquad (2)$$

$$x_j \in D_j \qquad j = 1, \dots, n \qquad (3)$$

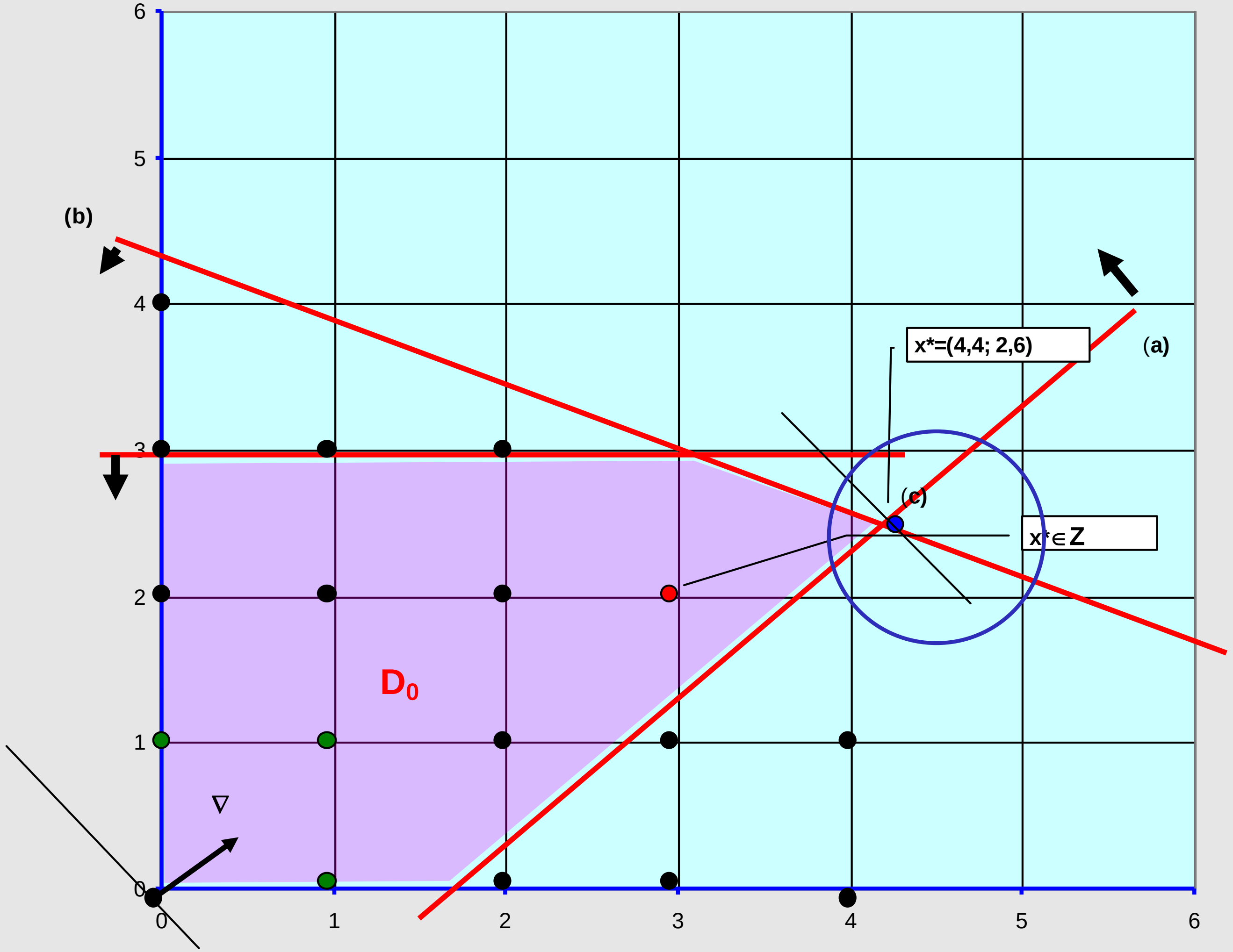
pričom množina *D_j* môže mať napr. nasledovný tvar

$$D_j = Z^{\geq 0} = \langle 0; \infty) \wedge celo\ č., \quad j = 1, \dots, n$$
$$D_j = \{ 0,1 \}, \qquad j = 1, \dots, n$$
$$D_j = Z^{\geq 0}, \quad j = 1, \dots, k; D_j = R^{\geq 0}, \quad j = k + 1, \dots, n$$
$$D_j \in \{ 0;1 \}, \quad j = 1, \dots, k; D_j = R^{\geq 0}, \quad j = k + 1, \dots, n$$

$$D_j = R^{\geq 0} = \langle 0; \infty), \qquad j = 1, \dots, n$$

Oblasti ekonomických aplikačných problémov celočíselného programovania

- Optimalizácia voľby výrobnej stratégie firmy s kusovou výrobou. - CP
- Dopravný problém- CP
- Priraďovací problém – BiP
- Optimalizácia výberu investitčnej stratégie podniku– BiP
- Fixed Charge Problem - ZmCP
- Úloha obchodného cestujúceho - BiP
- Optimalizácia inevestičného rozvoja a výrobnej stratégie expandujcich divízií koncernu – ZmBiP


6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6
(b)
(a)
(c)
x*=(4,4; 2,6)
x*∈Z
D0
∇

Branch-and-Bound-Algoritmus pre riešenie úloh celočíselného programovania

Preskúmajme úlohu celočíselného programovania (1) v tvare

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \rightarrow \max \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \in Z \end{aligned} \qquad (1)$$

Ideová schéma metódy vetiev a hraníc

I. Initializácia

Riešme úlohu (1) bez podmienky $\mathbf{x} \in Z$

- OR: $\mathbf{x}^*$, $f(\mathbf{x}^*)$, $\mathbf{x}^* \in D_0 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$

I.a) $\mathbf{x}^* \in Z \rightarrow$ Stop

I.b) $\mathbf{x}^* \notin Z \rightarrow$ II

II. Branch-and-Bound Proces

1. $x_j = r_j + n_j \ , \quad \forall j$

pričom $n_j = \lfloor x_j \rfloor; \quad r_j = x_j - n_j, \quad \forall j$

potom dostaneme: $r_k = \underbrace{\max}_{j} \{ \ r_i, \ \}$

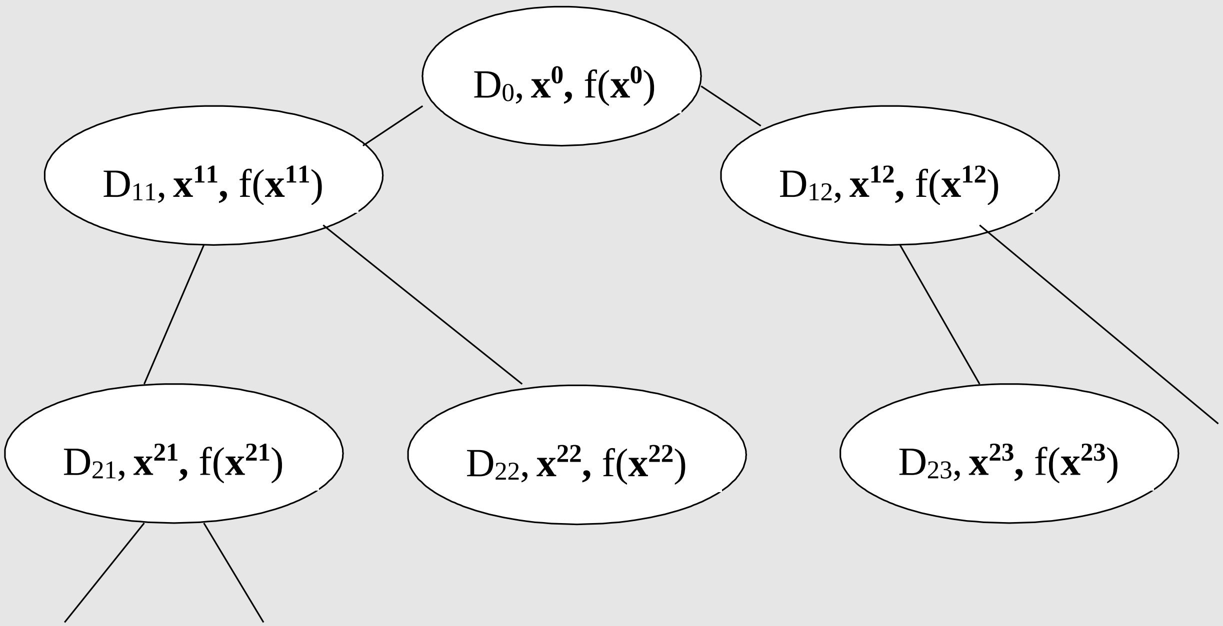
2. K úlohe *D₀* skonštruujeme dve čiastkové úlohy

$$D_{11} = D_0 \cap \{\mathbf{x} \ | x_k \le n_k \ \}$$

$$D_{12} = D_0 \cap \{\mathbf{x} \ | x_k \ge n_k + 1\}$$

Týmto spôsobom proces vetvenia pokračue a dostaneme rozhodovací strom s uzlami, ktoré zodpovedajú jednotlivým čiastkovým úloham.

Rozhodovací strom



Uzly D_{ij} stromu považujeme za preskúmané a proces končí v príslušnom uzle v prípade ak:

1. **Úloha D_{ij} nemá prípustné riešenie**
2. **Úloha D_{ij} má celočíselné optimálne riešenie**
3. **Hodnota účelovej funkcie úlohy D_{ij} je horšia ako najlepšia doposiaľ registrovaná hodnota účelovej funkcie úlohy s celočíslným riešením**

Koniec algoritmu

Algoritmus končí, ak sú všetky uzly rozhodovacieho stromu zodpovedajúce príslušným čiastkovým úlohám označené ako preskúmané.

1. Optimálne riešenie sa realizuje v tom uzle, v ktorom celočíselné optimálne riešenie dosahuje extrémnu hodnotu účelovej funkcie

2. Ak uzol s takouto vlastnosťou neexistuje, tak úloha nemá celočíselne optimálne riešenie

Príklad pre metódu vetiev a hraníc

$$f(x_1, x_2) = 80x_1 + 90x_2 \to \max$$

pri ohraničeniach

$$10x_1 + 5x_2 \le 47$$
$$5x_1 + 10x_2 \le 43$$
$$x_2 \le 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0, \in Z$$

Riešenie: I. Fáza - **Riešenie úloh D_0**

$$f(x_1, x_1) = 80x_1 + 90x_2 \qquad \to \quad max$$

$p.o.$

$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 + s_1 \quad &= 47 \\ 5x_1 + 10x_2 + s_2 \quad &= 43 \\ x_2 + s_3 &= 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tab.1 (1. Iterácia)

	$f(x_1, x_2)$	80	90	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	0	10	5	1	0	0	47
s_2	0	5	10	0	1	0	43
← s_3	0	0	1•	0	0	1	3
r_j^I		80	90↑	0	0	0	0

Tab.2 (2. Iterácia)

	$f(x_1, x_2)$	80	90	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	0	10	0	1	0	-5	32
$\leftarrow s_2$	0	•5	0	0	1	-10	13
x_2	90	0	1	0	0	1	3
r_j		↑80	0	0	0	0	0

Charakteristika riešenia

$$B = (\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5) \quad \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3) = (0 \quad 3 \quad 32 \quad 13 \quad 0)$$

$$f(x) = 270$$

$$(r_j) = \left(\underbrace{80}_{\max} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -90 \right) \sim \leq 0$$

Tab.3 (3. Iterácia)

	$f(x_1, x_2)$	80	90	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
←s_1	0	0	0	1	-2	•15	6
x_1	80	1	0	0	1/5	-2	2,6
x_2	90	0	1	0	0	1	3
r_j		0	0	0	-16	↑70	478

Charakteristika riešenia

$$B = (\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) \quad \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3) = (2,6 \quad 3 \quad 6 \quad 0 \quad 0)$$

$$f(x) = 478$$

$$(r_j) = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad -16 \quad \underbrace{70}_{\max}\right) \sim \leq 0$$

Tab.4 (4. Iterácian)

		$f(x_1, x_2)$	80	90	0	0	0	
	x_B	**c_B**	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
	s_3	0	0	0	1/15	-2/15	1	0,4
	x_1	80	1	0	2/15	-1/15	0	3,4
	x_2	90	0	1	-1/15	2/15	0	2,6
	r_j		0	0	-70/15	-100/15	0	478

Charakteristika riešenia

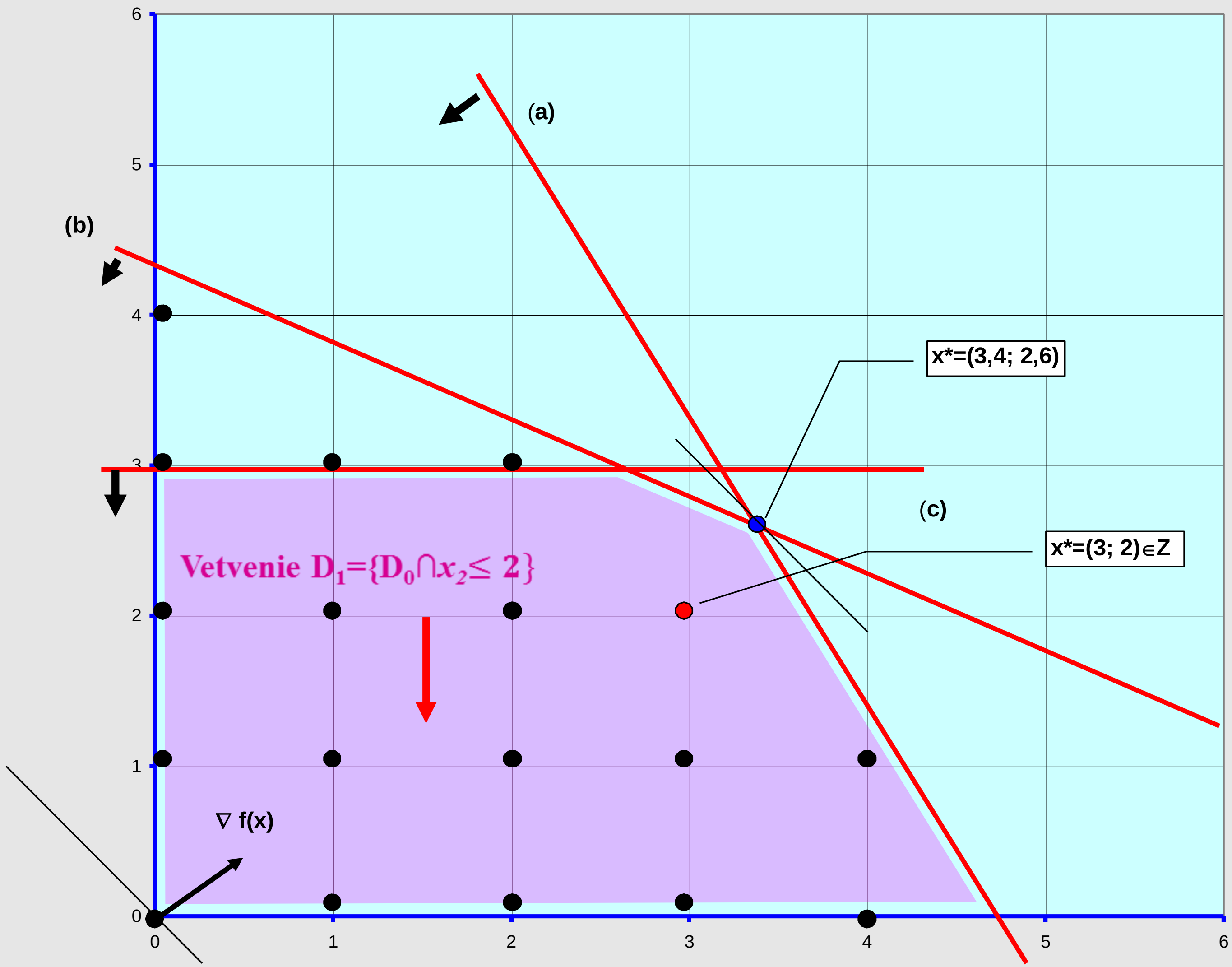
$$\mathrm{B} = (\mathbf{A}_5, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) \quad \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3) = (3{,}4 \quad 2{,}6 \quad 0 \quad 0 \quad 0{,}4 \quad)$$

$$f(x) = 506$$

$$(r_j) = (\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -70/15 \quad -100/15) \le 0$$

Stop prvej etapy … Neceločíselné optimálne riešenie

2. etapa … metóda vetiev a hraníc



6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6
(a)
(b)
(c)
x*=(3,4; 2,6)
x*=(3; 2)∈Z
Vetvenie D1={D0∩x2≤ 2}
∇ f(x)

$x_2 \leq 2$

$x_2 = 2{,}6 + 1/15 s_1 - 2/15 s_2 \leq 2$

$1/15 s_1 - 2/15 s_2 \leq -0{,}6$

- Riešenie úloh $D_1 = \{D_0 \cap x_2 \leq 2\}$

$$\Rightarrow \quad 1/15 s_1 - 2/15 s_2 + s_4 = -0{,}6 \Rightarrow DASM$$

	$f(x_1, x_2)$	80	90	0	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
s_3	0	0	0	1/15	-2/15	1	0	6/15
x_1	80	1	0	2/15	-1/15	0	0	51/15
x_2	90	0	1	-1/15	2/15	0	0	39/15
$\leftarrow s_4$	0	0	0	1/15	●-2/15	0	1	-9/15
r_j		80	0	-70/15	-100/15↑	0	0	478

	$f(x_1, x_2)$	80	90	0	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
s_3	0	0	0	0	0	1	-1	15/15
x_1	80	1	0	0	0	0	-1/2	37/10
x_2	90	0	1	1	0	0	1	2
s_2	0	0	1	-1/2	1	0	-15/2	9/2
r_j		0	0	-90	0	0	-50	476

Charakteristika riešenia

$\boxed{\Rightarrow \quad 1/15s_1 - 2/15s_2 + s_4 = -0{,}6 \;\Rightarrow DASM}$

$f(x_1, x_2)$		80	90	0	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
s_3	0	0	0	0	0	1	-1	1
x_1	80	1	0	0	0	0	-1/2	3,7
x_2	90	0	1	1	0	0	1	2
s_2	0	0	1	-1/2	1	0	-15/2	4,5
r_j		0	0	-90	0	0	-50	476

$$\mathrm{B} = (\mathbf{A}_5, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4) \quad \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4) = (3{,}7 \quad 2 \quad 1 \quad 4{,}5 \quad 0 \quad 0)$$

$$f(x) = 476$$

$$(r_j) = (\quad 0 \quad 0 \quad -90 \quad 0 \quad 0 \quad -50) \le 0$$