Modely a metódy lineárneho a celočíselného programovania

(Tézy k prenáške č. 7)

Téma prednášky

Parametrické programovanie

(Časť 1)

Prof. Dr. Michal Fendek

Katedra operačného výskumu a ekonmetrie

Ekonomická univerzita Bratislava

Dolnozemská 1

852 35 Bratislava

Parametrické programovanie – parameter v koeficientoch účelovej funkcie

Daná je úloha lineárneho programovania

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(t)^T \mathbf{x} &\to \max \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq 0 \\
t \in I &= \langle T_d, T_h \rangle
\end{aligned}
\qquad \textbf{(UPL\_c)}
$$

- Predpoklady:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{N}, \mathbf{E}] \in R^{m \times n};\ h(\mathbf{A}) = m$$

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}^1 + \mathbf{c}^1 t \in R^n;\ \mathbf{c}(t) = \left[c_j^1 + c_j^2 t\right]_{j=1}^n; \quad \mathbf{x}, \mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2 \in R^n$$

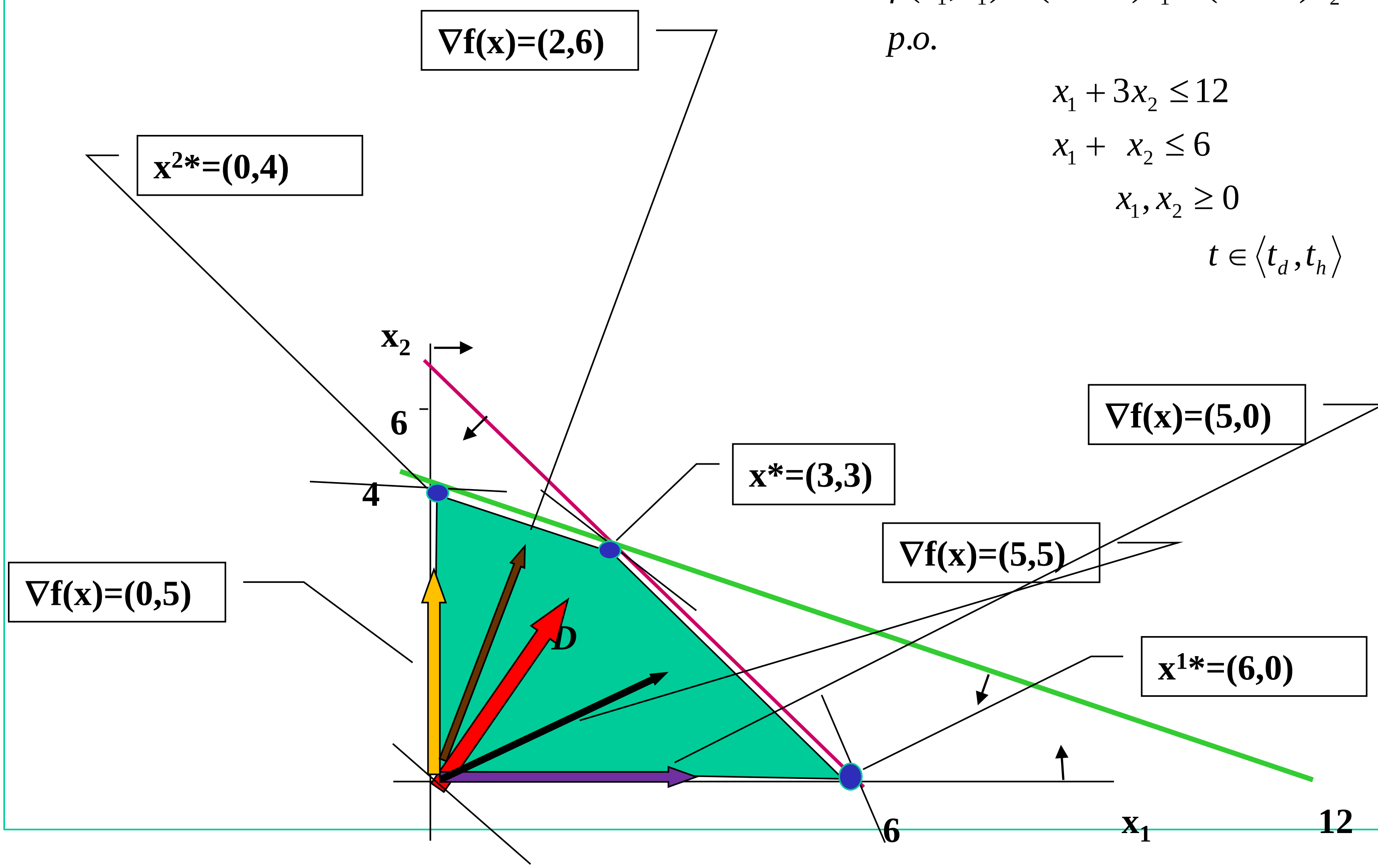
$$\mathbf{b} \in R^m,\ t, T_d, T_h \in R$$

Analýza senzitivity koef. Účel. Funkcie

$$f(x_1, x_1) = (3 + at)x_1 + (5 + bt)x_2 \quad \rightarrow \quad max$$

p.o.

$$x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$x_1 + \ x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$
$$t \in \langle t_d, t_h \rangle$$



Podmienka primárnej prípustnosti pre úlohu LP

$$\max\left\{f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \,\middle|\, \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge 0\right\}$$

má tvar

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \ge \mathbf{0} \\ x_{0i} \ge 0, \quad \forall i = 1,\ldots,m \end{array}}$$

Podmienka duálnej prípustnosti pre úlohu LP

$$\min\left\{g(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T\mathbf{b} \,\middle|\, \mathbf{u}^T\mathbf{A} \ge \mathbf{c}^T,\ \mathbf{u} \ge 0\right\}$$

má tvar

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{u})$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{u}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1} \\ c_j - z_j = c_j - \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j \ge \mathbf{0} \iff \mathbf{u}^T\mathbf{A}_j \ge c_j \end{array}}$$

Podmienka primárnej prípustnosti pre úlohu ÚLP_c

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$
$$x_{0i} \geq 0, \quad \forall i = 1,\ldots,m$$

Podmienka duálnej prípustnosti

$$\mathbf{u}^T = \left(\mathbf{c}_B^{1T} + \mathbf{c}_B^{2T} t\right)\mathbf{B}^{-1}$$
$$r_j = c_j - z_j = \left(c_j^1 + c_j^2 t\right) - \left(\mathbf{c}_B^{1T} + \mathbf{c}_B^{2T} t\right)\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j \leq \mathbf{0}, \quad \forall j = 1,\ldots,n$$
$$r_j = \left(c_j^1 - \mathbf{c}_B^{1T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j\right) + t\left(c_j^2 - \mathbf{c}_B^{2T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j\right) \leq \mathbf{0}, \quad \forall j = 1,\ldots,n$$
$$r_j = r_j^1 + r_j^2 t \leq \mathbf{0}, \quad \forall j = 1,\ldots,n$$

Podmienka duálnej prípustnosti – odvodenie intevalu prípustných zmien pre koeficienty účelovej funkcie

$$r_j = r_j^1 + r_j^2 t \le \mathbf{0}, \quad \forall j = 1,\ldots,n$$

$$r_j^2 t \le -r_j^1, \quad \forall j = 1,\ldots,n$$

$$t_h = \begin{cases} \min\limits_{r_j^2>0} \dfrac{-r_j^1}{r_j^2} & \forall j = 1,\ldots,n, \quad \exists_{j=1,\ldots,n} r_j^2 > 0 \\ \infty & r_j^2 \le 0 \quad \forall j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

$$t_d = \begin{cases} \max\limits_{r_j^2<0} \dfrac{-r_j^1}{r_j^2} & \forall j = 1,\ldots,n, \quad \exists_{j=1,\ldots,n} r_j^2 < 0, \ \forall j = 1,\ldots,n, \\ -\infty & r_j^2 \ge 0 \quad \forall j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

ALGORITMUS

I. etapa - inicializačná

Krok 1. Určenie VPBR UParP (ZASM, 2FASM, DASM)

k=1, $I \in \{t \mid t \in \langle T_d, T_h \rangle\}$

II. etapa – základná

Krok 2 Určenie intervalu prípustných hodnôt parametra *t* pre bázické riešenie bázy $\mathbf{B}^{\mathbf{k}}$

$$r_j = r_j^1 + r_j^2 t \leq \mathbf{0}, \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

$$r_j^2 t \leq -r_j^1, \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

$$t_h^k = \begin{cases} \min\limits_{r_j^2 > 0} \dfrac{-r_j^1}{r_j^2} & \forall j = 1, \ldots, n, \ \exists_{j=1,\ldots,n} \ r_j^2 > 0 \\ \infty & r_j^2 \leq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

$$t_d^k = \begin{cases} \max\limits_{r_j^2 < 0} \dfrac{-r_j^1}{r_j^2} & \forall j = 1, \ldots, n, \ \exists_{j=1,\ldots,n} \ r_j^2 < 0, \ \forall j = 1, \ldots, n, \\ -\infty & r_j^2 \geq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

a) Ak $\bigcup_{i=1}^{k} I_k = I$, tak je preskúmaný celý interval definovaný pre parameter t, → STOP
b) Ak $\bigcup_{i=1}^{k} I_k \subset I$, tak nie je preskúmaný celý interval definovaný pre parameter t, → Krok 3

Krok 3.

- predpokladáme, že sa prekročí dolná alebo horná hranica intervalu prípustnosti hodnôt parametra t, $I^k = \{t \mid t \in \langle t_d^k, t_h^k \rangle\}$

- V dôsledku toho sa pre niektorú primárnu premennú poruší platnosť kritéria optimálnosti, resp. duálnej prípustnosti.

- Príslušnú premennú identifikujeme a realizujeme adekvátnu iteráciu podľa primárneho algoritmu simplexovej metódy

- Položíme číslo iterácie $k = k + 1$ a vrátime sa na Krok 2.

Príklad

Riešme ULP s parametrizovanými koeficientami účelovej funkcie

$$f(x_1, x_2) = (6 + 2t)x_1 + (10 - t)x_2 \rightarrow max$$

Pri ohraničeniach

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 16 \\ 2x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ t &\in \langle -5,5 \rangle \end{aligned}$$

Upravme úlohu na štandardný tvar

$$f(x_1, x_2) = (6 + 2t)x_1 + (10 - t)x_2 \rightarrow max$$

Pri ohraničeniach

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + w_1 \qquad &= 16 \\ 2x_1 + 2x_2 \qquad + s_1 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

S použitím dvojfázového simplexovej metódy nájdeme východiskové prípustné bázické riešenie

Iterácia 1.

		0	0	1	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_1	w_1	s_1	**b**
$\leftarrow w_1$	1	2	4●	1	0	16
s_1	0	4	2	0	1	12
r_j^I		-2	-4 ↑	0	0	16

$\mathbf{B} = (\mathbf{A_3}, \mathbf{A_4})$, $\qquad \boldsymbol{B}^{-1} = \mathbf{E}$

$\mathbf{x} = (0 \quad 0 \quad 16 \quad 12)$

$p(w_1) = 16$

$r_j = \begin{pmatrix} -2 & \underbrace{-4}_{min} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Iterácia 2.

		0	0	1	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	w_1	s_1	**b**
x_2	0	1/2	1	1/4	0	4
s_1	0	1	0	-1/2	1	4
r_j^I		0	0	1	0	0

$\mathbf{B} = (\mathbf{A_2}, \mathbf{A_4})$, $\quad \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/4} & \mathbf{0} \\ -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

$\mathbf{x} = (0 \quad 4 \quad 4 \quad 0)$

$p(w_1) = 0$

$r_j = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$

Iterácia 3.

Získali sme VPBR bez umelej premennej, pokračujem v riešení s pôvodnou účelovou funkciou

			6+2t	10-t	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}^{1}$	$\mathbf{c_B}^{2}$	x_1	x_2	w_1	s_1	**b**
x_2	10	-1	1/2	1	1/4	0	4
s_1	0	0	1	0	-1/2	1	4
r_j^{1}			1	0	-5/2	0	40
$r_j^{2\}}(t)$			5/2	0	1/4	0	-4

$\mathbf{B} = (\mathbf{A_2}, \mathbf{A_4})$, $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ **KO:** **a)** $1 + \frac{5t}{2} \leq 0 \Longrightarrow \; t \leq -2/5$

$\mathbf{x} = (0 \quad 4 \quad 4 \quad 0)$

$f(\mathbf{x})$ =40-4t

b) **pre umelú premennú neskúmame!!!**

$r_j = \begin{pmatrix} 1 + \frac{5t}{2} & -4 & -\frac{5}{2} + 1/4t & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{I^1 = \langle -5,\ -2/5 \rangle}$

Iterácia 3.

Predpokladajme , že prekročíme hornú hranicu intervalu I^1, t.j. platí $t \geq = -\frac{2}{5}$. Dostávame

			6+2t	10-t	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}^1$	$\mathbf{c_B}^2$	x_1	x_2	w_1	s_1	**b**
x_2	10	-1	1/2	1	1/4	0	4
$\leftarrow s_1$	0	0	1●	0	-1/2	1	4
r_j^1			1	0	-5/2	0	40
$r_j^{2\}}(t)$			5/2↑	0	1/4	0	-4

$\mathbf{B} = (\mathbf{A_2}, \mathbf{A_4})$, $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ **KO:** **a)** $1 + \frac{5t}{2} \leq 0 \Longrightarrow \ t \leq -2/5$

$\mathbf{x} = (0 \quad 0 \quad 16 \quad 12)$ **b)** **pre umelú premennú neskúmame!!!**

$f(\mathbf{x}) = 40 - 4t$

$r_j = \left(1 + \frac{5t}{2} \qquad -4 \qquad -\frac{5}{2} + 1/4t \qquad 0\right)$ $\boldsymbol{I^1 = \langle -5, \ -2/5 \rangle}$

Iterácia 4.

Predpokladajme , že prekročíme hornú hranicu intervalu I^1, t.j. platí $t \geq = -\frac{2}{5}$. Dostávame

			6+2t	10-t	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}^1$	$\mathbf{c_B}^2$	x_1	x_2	w_1	s_1	**b**
x_2	10	-1	0	1	1/2	-1/2	2
x_1	6	2	1	0	-1/2	1	4
r_j^1			0	0	-2	-1	44
$r_j^{2\}}(t)$			0	0	3/2	-5/2	6

$\mathbf{B} = (\mathbf{A_2}, \mathbf{A_1})$, $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ **KO:** **a)** $-1 - \frac{5t}{2} \leq 0 \Rightarrow \; t \geq -2/5$

$\mathbf{x} = (4 \quad 2 \quad 0 \quad 0)$ **b)** **pre umelú premennú neskúmame!!!**

$f(\mathbf{x}) = 44 + 6t$

$r_j = \left(0 \qquad 0 \qquad -2 + \frac{3t}{2} \qquad -1 - 5t/2\right)$ $\boldsymbol{I^2 = \langle -2/5, \; 5\rangle}$

Záver: $\boldsymbol{I^1 \cup I^2 = I = \left\langle -5, \; -\frac{2}{5}\right\rangle \cup \left\langle -\frac{2}{5}, \; 5\right\rangle = \langle -5, 5\rangle}$ STOP

Prehľad výsledkov riešenia úlohy ParP

k	$\boldsymbol{I^k}$	B	x_1	x_2	w_1	s_1
1	$\langle -5, -2/5 \rangle$	$(\mathbf{A_2}, \mathbf{A_4})$	0	4	0	4
2	$\langle -2/5, 5 \rangle$	$(\mathbf{A_2}, \mathbf{A_1})$	4	2	0	0

k	$\boldsymbol{I^k}$	$f(\mathbf{x})$	$f(\mathbf{x})_d$	$f(\mathbf{x})_h$	c_1	c_2
1	$\langle -5, -2/5 \rangle$	$40 - 4t$	60	$41\frac{3}{5}$	$\langle -4{,}26/5 \rangle$	$\langle 52/5{,}15 \rangle$
2	$\langle -2/5, 5 \rangle$	$44 + 6t$	$41\frac{3}{5}$	74	$\langle 26/5{,}12 \rangle$	$\langle 5{,}52/5 \rangle$