Modely a metódy lineárneho a celočíselného programovania

(Tézy k prednáške č. 5)

Téma prednášky

Modifikovaný algoritmus simplexovej metódy

Prof. Dr. Michal Fendek

Katedra operačného výskumu a ekonmetrie
Ekonomická univerzita Bratislava
Dolnozemská 1
852 35 Bratislava

Modifikovaný algoritmus simplexovej metódy - Algoritmus

Budeme skúmať úlohu lineárneho programovania v tvare

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \to \max \tag{1.1}$$

pri ohraničeniach

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{1.2}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{O} \tag{1.3}$$

Pripomíname, že pre rozmery úlohy a hodnosť matice sústavy ohraničení platia vzťahy $m, n \geq 2$, $h(\mathrm{A}) = m$, $m \leq n$.

Krok 1 Východiskové prípustné bázické riešenie

Rozložme maticu A na dve submatice B, N takto:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{B}, \mathbf{N})$$

kde

B $\in R^{m\times m}$ **je regulárna submatica o rozmere** $m\times m$,

N $\in R^{m\times (n-m)}$ **je submatica o rozmere** $m\times(n-m)$.

Ďalej rozložme vektor rozhodovacích premenných x $\in R^n$ **na dva subvektory, a to na subvektor bázických premenných** $\mathbf{x}_B \in R^m$ **a na subvektor nebázických premenných** $\mathbf{x}_N \in R^{n-m}$ **takto**

$$\mathbf{x}^T = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N)^T$$

Pre PR a DR ULP platia vzťahy

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \mathbf{p} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1} \end{aligned}}$$

Krok 2 Výpočet vektora redukovaných ocenení nebázických premenných

Vypočítame

- **vektor redukovaných ocenení nebázických premenných**

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{u}^T \mathbf{N}$$

resp po zložkách

$$r_j = (\mathbf{c}_N^T)_j - \mathbf{u}^T A_j \qquad j = 1,2,\ldots n-m$$

pokračuj na krok 3.

Výpočtová náročnosť tejto operácie spočíva v postupnom vyberaní každého stĺpca matice N a výpočte skalárneho súčinu tohto stĺpca s vektorom duálneho riešenia a odpočítaní tohto skalárneho súčinu od koeficientu účelovej funkcie zodpovedajúcej nebázickej premennej. Je zrejme, že pri vysokom pocte stĺpcov v matici N, čo je pre praktické úlohy ekonomického rozhodovania nezriedkavé, je realizácia tohto kroku náročná.

Krok 3 Vyber stĺpca vstupujúceho do bázy

Vypočítame

- **maximálny prvok vektora redukovaných ocenení nebázických premenných**

$$r_q = \max_{j=1,2,\ldots n-m} \{r_j\}$$

(1) ak $r_q = 0$, tak aktuálne bázické prípustné riešenie je optimálne, platí

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N)^T$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}$$

$$f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$$

algoritmus konci.

(2) ak $r_q > 0$, tak aktuálne bázické prípustné riešenie nie je optimálne, nebázicky stĺpec A_q z matice N je vstupujúci, premenná $(x_N)_q$ sa stane bázickou s hodnotou $t > 0$

pokračuj na krok 4

Tato operácia nie je náročná, predstavuje nájdenie maximálneho prvku vektora redukovaných ocenení. Ak vyber nie je jednoznačný, t. j. maximálna hodnota r_j sa dosahuje pre viac stĺpcov matice N, tak možno ako vstupujúci vybrať ľubovoľný z nich. Poznamenávame, že existujú aj prepracovanejšie metódy výberu vstupujúceho stĺpca, napríklad porovnanie absolútnych zmien hodnôt účelovej funkcie pre určitý počet stĺpcov, ktoré nespĺňajú podmienku kritéria optimálnosti. Efekt z ich použitia však obvykle nekompenzuje numerickú náročnosť spojenú s ich realizáciou, a preto ich praktické využitie je diskutabilne.

Krok 4 Prepočet koeficientov stĺpca vstupujúceho do bázy

Vypočítame

- **rozklad stĺpca vstupujúceho do bázy**

$$P_q = \mathbf{B}^{-1} A_q$$

pokračuj na krok 5.

Tato operácia predstavuje vynásobenie matice aktuálnej inverznej bázy stĺpcovým vektorom A_q sprava.

Krok 5 Vyber stĺpca vystupujúceho z bázy a výpočet hodnoty vstupujúcej premennej

Vypočítame

- **hodnotu vstupujúcej premennej**

  $(x_N)_q = t > 0$, pričom môžu nastať dva prípady

(1) $$(\mathbf{x}_N)_q = t = \infty \text{, ak } \underset{i=1,2,\ldots m}{\forall} i \,\middle|\, p_{iq} \le 0$$

v takomto prípade vstupujúca premenná nadobúda neohraničenú hodnotu a neohraničená je aj hodnota účelovej funkcie a algoritmus končí.

(2) $$(\mathbf{x}_N)_q = t = \frac{p_s}{p_{sq}} = \min_{i \mid p_{iq} > 0} \left(\frac{p_i}{p_{iq}} \right) \quad \text{ak } \underset{i=1,2,\ldots m}{\exists} i \,\middle|\, p_{iq} > 0$$

v takom prípade sa minimálny podiel realizuje pre $i = s$ a vstupujúca premenná nadobúda konečnú hodnotu. Bázicky stĺpec A_s je vystupujúci a bázická premenná $(x_B)_s$ sa stáva nebázickou s hodnotou nula. Prvok vstupujúceho stĺpca v s-tom riadku p_{sq} nazývame pivotným prvkom.

pokračuj na krok 6

Operácia spočíva vo vzájomnom vydelení prvkov dvoch vektorov a nájdení minimálneho podielu. V prípade nejednoznačnosti minimálneho podielu je vyber ľubovoľný, obvykle sa však ako pivotný prvok vyberá ten, ktorý ma najvyššiu hodnotu riadkového indexu.

Krok 6 Operácia transformácie bázy

Platí

- **hodnota nebázickej vstupujúcej premennej** $(\mathbf{x}_N)_q = t > 0$
- **hodnota bázickej vystupujúcej premennej** $(\mathbf{x}_B)_s = 0$
- **stĺpec $A_q \in$ N vstupuje do bázy B a nahradzuje stĺpec $A_s \in$ B, pre novu bázu $\overline{\mathbf{B}}$ platí**

  $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s^T + A_q\mathbf{e}_s^T$ **, resp. po zavedení substitučné matice F**

  $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{B}(\mathbf{E} - \mathbf{e}_s\mathbf{e}_s^T + P_q\mathbf{e}_s^T) = \mathbf{BF}$
- **vypočítame inverznú maticu $\overline{\mathbf{B}}^{-1}$ novej bázy $\overline{\mathbf{B}}$ podľa vzťahu**

  $\overline{\mathbf{B}}^{-1} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{HB}^{-1}$

pričom pre prvky matice H platí

$$h_{ij} = \begin{cases} \text{ak } j \neq s & \begin{cases} 1 & \text{ak } i = j \\ 0 & \text{ak } i \neq j \end{cases} \\ \text{ak } j = s & \begin{cases} 1/p_{sq} & \text{ak } i = s \\ -p_{iq}/p_{sq} & \text{ak } i \neq s \end{cases} \end{cases}$$

a matica H má takýto tvar

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & -p_{1q}/p_{sq} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & -p_{2q}/p_{sq} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1/p_{sq} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -p_{mq}/p_{sq} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- **položíme**

$$\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \overline{\mathbf{B}}^{-1}$$

návrat na krok 1

Operácia je výpočtovo najnáročnejšia, predstavuje prepočet všetkých prvkov matice inverznej báz realizovaný prostredníctvom súčinu dvoch matíc, pomocnej matice H vynásobenej sprava inverzn maticou $\mathbf{B}^{-1}$ pôvodnej bázy. Pri práci s maticou H je samozrejme výhodne pracovať s vektorom P_q nie s vektorom H_q, čo ušetrí vykonávanie operácie delenia zložiek vektora P_q prvkom p_{sq}.

Modifikovaný algoritmus simplexovej metódy

Príklad 2.4

S použitím modifikovaného algoritmu simplexovej metódy riešte nasledujúcu úlohu lineárneho programovania

$$f(\mathbf{x}) = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \max$$

4

pri ohraničeniach

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad\quad\quad &\le 4 \\
x_1 + \quad\quad 2x_3 - 2x_4 &\le 8 \\
2x_1 + x_2 \quad\quad\quad\quad\quad &\le 4 \\
x_j &\ge 0 \qquad j = 1,\ldots 4
\end{aligned}$$

Zavedením doplnkových premenných upravíme úlohu na štandardný a zároveň kanonicky tvar. Použijeme označenie doplnkových premenných x_j, v súlade so symbolikou použitou pri formulácii algoritmu. Dostávame

$$f(\mathbf{x}) = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \max$$

pri ohraničeniach

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad\quad + x_5 \quad\quad &= 4 \\
x_1 + \quad\quad 2x_3 - 2x_4 \quad + x_6 \quad &= 8 \\
2x_1 + x_2 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + x_7 &= 4 \\
x_j \ge 0 \qquad j &= 1,\ldots 7
\end{aligned}$$

Východisková báza je tvorená stĺpcami zodpovedajúcimi doplnkovým premenným a matice **B** a **N** sú takéto

$$\mathbf{B} = (A_5, A_6, A_7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_1^{-1} \qquad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Iterácia

Krok 1, výpočet bázického prípustného riešenia a duálneho riešenia

- bázické prípustné riešenie

$$\mathbf{x}_B^{1\,T} = \mathbf{p}^T = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = (x_5, x_6, x_7) = (4,8,4)$$

$$\mathbf{c}_B^{1\,T} = (c_5, c_6, c_7) = (0,0,0)$$

$$\mathbf{x}_N^{1\,T} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0,0)$$

$$\mathbf{c}_N^{1\,T} = (c_1, c_2, c_3, c_4) = (6,4,2,4)$$

- duálne riešenie

$$\mathbf{u}^{1\,T} = \mathbf{c}_B^{1\,T}\mathbf{B}^{-1} = (0,0,0)\mathbf{E} = (0,0,0)$$

Krok 2, výpočet vektora redukovaných ocenení nebázických premenných

- vektor redukovaných ocenení nebázických premenných

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^{1\,T} - \mathbf{u}^{1\,T}\mathbf{N} = (6,4,2,4) - (0,0,0)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (6,4,2,4) - (0,0,0,0) = (6,4,2,4)$$

Modifikovaný algoritmus simplexovej metódy

Krok 3, vyber stĺpca vstupujúceho do bázy

- maximálny prvok vektora redukovaných ocenení nebázických premenných

$$r_q = \max_{j=1,\dots 4}\{r_j\} = \max\{6,4,2,4\} = 6$$

$$r_q = r_1 = 6$$

$$q = 1$$

aktuálne bázické prípustné riešenie nie je optimálne, nebázicky stĺpec A_1 z matice $\mathbf{N}$ je vstupujúci, premenná $(\mathbf{x}_N)_1 = x_1$ sa stane bázickou s hodnotou $t > 0$

Krok 4, prepočet koeficientov stĺpca vstupujúceho do bázy

- rozklad stĺpca vstupujúceho do bázy

$$P_1 = \mathbf{B}^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Krok 5, vyber stĺpca vystupujúceho z bázy a výpočet hodnoty vstupujúcej premennej

- pretože $\underset{i=1,2,3}{\exists} i \,|\, p_{i1} > 0$ vypočítame

$$(\mathbf{x}_N)_1 = \min_{i|p_{i1}>0}\left(\frac{p_i}{p_{i1}}\right) = \min\left\{\frac{4}{2},\frac{8}{1},\frac{4}{2}\right\} = \frac{4}{2} = 2 = \frac{p_s}{p_{s1}} = \frac{p_1}{p_{11}}$$

keďže sa minimálny podiel realizuje v dvoch prípadoch, vyberieme nižší index, t. j. $s = 1$ a vstupujúca premenná x_1 nadobúda konečnú hodnotu, bázicky stĺpec A_5 je vystupujúci a bázická premenná $(\mathbf{x}_B)_1 = x_5$ sa stáva nebázickou premennou.

Krok 6, operácia transformácie bázy

- hodnota nebázickej vstupujúcej premennej $(\mathbf{x}_N)_1 = 2$
- hodnota bázickej vystupujúcej premennej $(\mathbf{x}_B)_1 = 0$
- stĺpec $A_1 \in \mathbf{N}$ vstupuje do bázy $\mathbf{B}$ a nahradzuje stĺpec $A_5 \in \mathbf{B}$, nová báza obsahuje je potom $\overline{\mathbf{B}} = (A_1, A_6, A_7)$
- vypočítame inverznú maticu $\overline{\mathbf{B}}^{-1}$ novej bázy $\overline{\mathbf{B}}$ podľa vzťahu

$$\overline{\mathbf{B}}^{-1} = \mathbf{H}\mathbf{B}^{-1}$$

pričom pre prvky matice **H** platí

$$h_{ij} = \begin{cases} \text{ak } j \neq 1 & \begin{cases} 1 & \text{ak} \quad i = j \\ 0 & \text{ak} \quad i \neq j \end{cases} \\ \text{ak } j = 1 & \begin{cases} 1/p_{11} & \text{ak} \quad i = 1 \\ -p_{i1}/p_{11} & \text{ak} \quad i \neq 1 \end{cases} \end{cases}$$

pre $i, j = 1, 2, 3$

matica H má tvar

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a inverznú maticu $\overline{\mathbf{B}}^{-1}$ vypočítame takto

$$\overline{\mathbf{B}}^{-1} = \mathbf{H}\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- položíme

$$\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}} = (A_1, A_6, A_7)$$

$$\mathbf{N} = (A_5, A_2, A_3, A_4)$$

$\mathbf{B}^{-1} = \overline{\mathbf{B}}^{-1}$ pokračuj na iteráciu 2

2. Iterácia

Krok 1, výpočet bázického prípustného riešenia a duálneho riešenia

- bázické prípustné riešenie

$$\mathbf{x}_B^{2\,T} = \mathbf{p}^T = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = (x_1, x_6, x_7) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = (2,6,0)$$

$$\mathbf{c}_B^{2\,T} = (c_1, c_6, c_7) = (6,0,0)$$

$$\mathbf{x}_N^{2\,T} = (x_5, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0,0)$$

$$\mathbf{c}_N^{2\,T} = (c_5, c_2, c_3, c_4) = (0,4,2,4)$$

- duálne riešenie

$$\mathbf{u}^{2\,T} = \mathbf{c}_B^{2\,T}\mathbf{B}^{-1} = (6,0,0) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (3,0,0)$$

Krok 2, výpočet vektora redukovaných ocenení nebázických premenných

- vektor redukovaných ocenení nebázických premenných

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^{2\,T} - \mathbf{u}^{2\,T}\mathbf{N} = (0,4,2,4) - (3,0,0)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (0,4,2,4) - (3,9,3,0) = (-3,-5,-1,4)$$

Krok 3, výber stĺpca vstupujúceho do bázy

- maximálny prvok vektora redukovaných ocenení nebázických premenných

$$r_q = \max_{j=1,\ldots 4}\{r_j\} = \max\{-3,-5,-1,4\} = 4$$

$$r_q = r_4 = 4$$

$$q = 4$$

aktuálne bázické prípustné riešenie nie je optimálne, štvrtý nebázicky stĺpec, t. j. stĺpec A_4 z matice $\mathbf{N}$ je vstupujúci, premenná $(\mathbf{x}_N)_4 = x_4$ sa stane bázickou s hodnotou $t > 0$

Krok 4, prepočet koeficientov stĺpca vstupujúceho do bázy

• rozklad stĺpca vstupujúceho do bázy

$$P_4 = \mathbf{B}^{-1} A_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Krok 5, vyber stĺpca vystupujúceho z bázy a výpočet hodnoty vstupujúcej premennej

• pretože $\underset{i=1,2,3}{\exists} i \,|\, p_{i1} > 0$ vypočítame

$$(\mathbf{x}_N)_4 = \mathrm{x}_4 = \min_{i|p_{i1}>0} \left(\frac{p_i}{p_{i4}} \right) = \min \left\{ \frac{6}{2} \right\} = 3 = \frac{p_2}{p_{24}}$$

minimálny podiel sa realizuje pre $s = 2$ a vstupujúca premenná x_4 nadobúda konečnú hodnotu, bázicky stĺpec A_6 je vystupujúci a bázická premenná $(\mathbf{x}_B)_2 = x_6$ sa stáva nebázickou premennou.

Krok 6, operácia transformácie bázy

- hodnota nebázickej vstupujúcej premennej $(\mathbf{x}_N)_4 = 3$
- hodnota bázickej vystupujúcej premennej $(\mathbf{x}_B)_2 = 0$
- stĺpec $A_4 \in \mathbf{N}$ vstupuje do bázy $\mathbf{B}$ a nahradzuje stĺpec $A_6 \in \mathbf{B}$, nová báza obsahuje je potom $\overline{\mathbf{B}} = (A_1, A_4, A_7)$
- vypočítame inverznú maticu $\overline{\mathbf{B}}^{-1}$ novej bázy $\overline{\mathbf{B}}$ podľa vzťahu

$$\overline{\mathbf{B}}^{-1} = \mathbf{H}\mathbf{B}^{-1}$$

pričom pre prvky matice $\mathbf{H}$ platí

$$h_{ij} = \begin{cases} \text{ak } j \neq 2 & \begin{cases} 1 & \text{ak } \; i = j \\ 0 & \text{ak } \; i \neq j \end{cases} \\ \text{ak } j = 2 & \begin{cases} 1/p_{24} & \text{ak } \; i = 2 \\ -p_{i4}/p_{24} & \text{ak } \; i \neq 2 \end{cases} \end{cases}$$

pre $i, j = 1, 2, 3$

Modifikovaný algoritmus simplexovej metódy

matica H má tvar

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a inverznú maticu $\overline{\mathbf{B}}^{-1}$ vypočítame takto

$$\overline{\mathbf{B}}^{-1} = \mathbf{HB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- položíme

$\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}} = (A_1, A_4, A_7)$

$\mathbf{N} = (A_5, A_2, A_3, A_7)$

$\mathbf{B}^{-1} = \overline{\mathbf{B}}^{-1}$ pokračuj na iteráciu 3

3. Iterácia

Krok 1, výpočet bázického prípustného riešenia a duálneho riešenia

- bázické prípustné riešenie

$$\mathbf{x}_B^{3\,T} = \mathbf{p}^T = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = (x_1, x_4, x_7) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = (2,3,0)$$

$$\mathbf{c}_B^{3\,T} = (c_1, c_4, c_7) = (6,4,0)$$

$$\mathbf{x}_N^{3\,T} = (x_5, x_2, x_3, x_6) = (0,0,0,0)$$

$$\mathbf{c}_N^{2\,T} = (c_5, c_2, c_3, c_6) = (0,4,2,0)$$

- duálne riešenie

$$\mathbf{u}^{3^T} = \mathbf{c}_B^{3\,T}\mathbf{B}^{-1} = (6,4,0)\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (2,2,0)$$

Krok 2, výpočet vektora redukovaných ocenení nebázických premenných

- vektor redukovaných ocenení nebázických premenných

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^{3\,T} - \mathbf{u}^{3^T}\mathbf{N} = (0,4,2,0) - (2,2,0)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (0,4,2,0) - (2,6,6,2) = (-2,-2,-4,-2)$$

Krok 3, vyber stĺpca vstupujúceho do bázy

- maximálny prvok vektora redukovaných ocenení nebázických premenných

$$r_q = \max_{j=1,\ldots 4}\{r_j\} = \max\{-2,-2,-4,-2\} = -2$$

nakoľko ak $r_q \le 0$, tak aktuálne bázické prípustné riešenie je optimálne, platí

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N)^T = (x_1, x_4, x_7, x_5, x_2, x_3, x_6) = (2,3,0,0,0,0,0)$$
$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} = (2,2,0)$$

$$f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = (6,4,0)\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = 24 \quad g(\mathbf{u}^*) = \mathbf{u}^T\mathbf{b} = (2,2,0)\begin{pmatrix}4\\8\\4\end{pmatrix} = 24$$

algoritmus končí.