Modely a metódy lineárneho a celočíselného programovania

(Tézy k prednáške č. 4)

Téma prednášky

Úlohy lineárneho programovania s ohraničenými premennými

Prof. Dr. Michal Fendek

Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Ekonomická univerzita Bratislava

Dolnozemská 1

852 35 Bratislava

Úlohy s ohraničenými premennými

Daná je úloha lineárneho programovania

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \max \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{d} \le \mathbf{x} &\le \mathbf{h} \\
\mathbf{h} \ge \mathbf{d} &\ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

(ULP s OHrP)

- Predpoklady:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{N}, \mathbf{E}] \in R^{m \times n};\ h(\mathbf{A}) = m$$

$$\mathbf{c} \in R^n;\ (\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{h}) \in R^n \qquad \Rightarrow$$

$$\mathbf{b} \in R^m$$

Formulujme úlohu (ULP OHrP) v analytickom tvare

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (1)$$

$p.o.$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, \dots, m \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} x_j &\geq d_j & j &= 1, \dots, n \\ x_j &\leq h_j & j &= 1, \dots, n \qquad (3) \\ h_j &\geq d_j \geq 0, & j &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

Úlohu (1)...(3) môžeme upraviť na štandardný tvar zavedením reziduálnych doplnkových premenných pre ohraničené premenné takto

$$\begin{aligned} x_j + r_j &= h_j & j &= 1, \dots, n \\ x_j - \tilde{r}_j &= d_j & j &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

Úloha má potom nasledovný tvar

$$f(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

p.o.

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, && i=1,\dots,m \qquad \text{(U1)} \\ &x_j + r_j = h_j && j=1,\dots,n \\ &x_j - \tilde{r}_j = d_j && j=1,\dots,n \\ &x_j, r_j, \tilde{r}_j \ge 0, && j=1,\dots,n \end{aligned}$$

Táto transformácia však zväčšuje rozmer bázy úlohy o stupeň 2n

$$\mathbf{E}^{m\times m} \Rightarrow \mathbf{E}^{(m+2n)\times(m+2n)}$$

a počet premenných tiež o 2n

$$\mathbf{x} \in R^n \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) \in R^{n+2n}$$

Riešenie úlohy (U1) priamym algoritmom SM vedie k riešeniu enormne rozsiahlej úlohy, čo je vážny numerický problém. Efektívnejšie je použiť špeciálny algoritmus, ktorý podmienky o charaktere premenných (3)

$$\begin{array}{ll} h_j \geq x_j \geq d_j & j = 1, \dots, n \\ h_j \geq d_j \geq 0, & j = 1, \dots, n \end{array}$$

zohľadňuje iba implicitne

a) Vplyv zdola ohraničených premenných eliminujeme nasledovnou substitúciou

$$\begin{array}{ll} x_j = \tilde{r}_j + d_j & \Rightarrow \\ d_j \leq x_j \leq h_j & \Rightarrow \\ d_j \leq \tilde{r}_j + d_j \leq h_j & \Rightarrow /-d_j \\ 0 \leq \tilde{r}_j \leq h_j - d_j & \end{array}$$

pričom je zrejmé, že pre zdola ohraničené premenné jednoznačne platí

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

b) Vplyv zhora ohraničených premenných analogickou substitúciou eliminovať nevieme, nakoľko substitúcia

$$x_j = h_j - r_j \qquad \Rightarrow$$
$$r_j, h_j \geq 0$$

negarantuje ne zápornosť zhora ohraničených premenných, t. j. platnosť vzťahu

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

takže rešpektovanie implicitnej podmienky pre zhora ohraničené premenné

$$x_j + r_j = h_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

musíme realizovať v rámci určitej modifikácie priameho simplexového algoritmu.

Modifikácia priameho simplexového algoritmu pre úlohu so zhora ohraničenými premennými U2

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1,\dots,m \qquad \text{(U2)}$$

$$x_j + r_j = h_j \qquad j = 1,\dots,n$$

$$x_j, r_j \geq 0, \qquad j = 1,\dots,n$$

A. Kritérium optimálnosti je nezmenené.

B. Kritérium prípustnosti bude vzhľadom na kontrolu implicitného ohraničenia

$$x_j + r_j = h_j \qquad j = 1,\dots,n$$

modifikované takto.

.

Musí teda platiť...... $$x_j + r_j = h_j \qquad j = 1, \ldots, n$$ **(4)**

- Nech KO nie je splnené a nebázická premenná $\boxed{(x_k = 0) \in \mathbf{x}_N}$ je vstupujúca s hodnotou $\boxed{x_k = t > 0}$ a zodpovedá nebázickému vstupujúcemu stĺpcu $\mathbf{A}_k \in \mathbf{N}$.

- Reziduálna nebázická doplnková premenná má v tomto prípade hodnotu hornej hranice a na základe vzťahu (4) platí $\boxed{r_k = h_k > 0}$

Otázka : Aké hodnoty $x_k = t > 0$ môže teda nadobúdať vstupujúca premenná

Vstupujúca premenná môže nadobúdať len takú hodnotu $x_k = t > 0$, pre ktorú platí

1. Hodnota vstupujúcej premennej dosiahne svoju hornú hranicu a platí

$$\boxed{t = t_1 = h_k}$$

V tomto prípade by hodnota účelovej funkcie vzrástla najvýraznejšie

2. Vstupujúca premenná $x_k = t > 0$ spôsobí zmenu aktuálneho bázického riešenia takto

$$\boxed{\tilde{x}_{i0} = x_{i0} - t \times x_{ik} \qquad i = 1, \dots, m}$$

pričom musí platiť

$$\boxed{0 \le x_{i0} - t \times x_{ik} \le h_i \qquad i = 1, \dots, m}$$

a) preskúmajme podmienku vzhľadom na dolné ohraničenie, resp. nezápornosť premennej

$$x_{i0} - t \times x_{ik} \ge 0 \qquad i = 1, \dots, m$$

$$t_2 = \max\left\{ t \mid x_{i0} - t \times x_{ik} \ge 0 \qquad i = 1, \dots, m \right\}$$

$$t_2 = \begin{cases} \min\limits_{x_{ik} > 0} \left[\dfrac{x_{i0}}{x_{ik}} \right] = \left[\dfrac{x_{L0}}{x_{Lk}} \right] & \exists_i\, x_{ik} > 0 \\ \infty & \forall_i\, x_{ik} \le 0 \end{cases}$$

b) preskúmajme podmienku vzhľadom na horné ohraničenie premennej

$$x_{i0} - t \times x_{ik} \le h_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$t_3 = \max \left\{ t \;\middle|\; x_{i0} - t \times x_{ik} \le h_i \qquad i = 1, \dots, m \right\}$$

$$t_3 = \begin{cases} \min\limits_{x_{ik} < 0} \left[\dfrac{h_i - x_{i0}}{-x_{ik}} \right] = \left[\dfrac{h_L - x_{L0}}{-x_{Lk}} \right] & \exists_i \, x_{ik} < 0 \\ \infty & \forall_i \, x_{ik} \ge 0 \end{cases}$$

Modifikované kritérium prípustnosti bázického riešenia

Nech x_k je vstupujúca nebázická premenná s hodnotou

$$x_k = t = \min\{t_1, t_2, t_3\}$$

a *L-tá* aktuálna bázická premenná je vystupujúca ⇒ ⇒

1. Ak $t = t_1 = h_k$, tak premenná x_k zostáva nebázickou s hodnotou hornej hranice a platí

$$\boxed{x_k = h_k}$$

Premenná r_k zostáva nebázickou s nulovou hodnotou a vo formulácii úlohy zavedieme substitúciu $\boxed{x_k = h_k - r_k}$

2. Ak $t = t_2$,

- **tak premenná x_k je vstupujúcou premennou,**
- **Vykonáme EZB s vedúcim prvkom $x_{LK} > 0$**
- **premenná $(x_B)_L$ sa stáva nebázickou s nulovou hodnotou.**

3. Ak $t = t_3$,

- **tak premenná x_k je vstupujúcou premennou,**
- **Vykonáme EZB s vedúcim prvkom $x_{LK} < 0$**
- **premenná $(x_B)_L$ sa stáva nebázickou s hodnotou hornej hranice a je vyjadrená substitúciou**

$$(\mathbf{x}_B)_L = (\mathbf{h}_B)_L - (\mathbf{r}_B)_L$$

.

Je daná úloha LP s ohraničenými premennými

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \quad \rightarrow \quad max$$

p.o.

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \quad \leq 14$$
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \quad \leq 23$$
$$0 \leq x_1 \leq 4$$
$$2 \leq x_2 \leq 5$$
$$0 \leq x_3 \leq 3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \quad \rightarrow \quad max$$

p.o.

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \quad \leq 14 \quad / s_1$$
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \quad \leq 23 \quad / s_2$$
$$x_1 \leq 4 \quad / s_3$$
$$x_2 \leq 5 \quad / s_4$$
$$x_2 \geq 2 \quad / s_5, w_1$$
$$x_3 \leq 3 \quad / s_6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Tab.1 Štandardný tvar ULP

	$f(x_1, x_2, , x_3)$	3	5	2	0	0	
$\mathbf{x}_B$	**$\mathbf{c}_B$**	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
s_1	0	1	2	2	1	0	14
s_2	0	2	4	3	0	1	23
r_j		3	5	2	0	0	$0=f(\mathbf{x})$

Zaveďme substitúciu pre zdola ohraničenú premennú

$x_2 - \tilde{r} = 2 \;\Rightarrow x_2 = 2 + \tilde{r}_2$

$0 \le \tilde{r}_2 \le 3 \qquad \tilde{r}_2 + r_2 = 3$

$0 \le x_1 \le 4$
$2 \le x_2 \le 5$
$0 \le x_3 \le 3$

$x_1 + r_1 = 4$
$x_2 + r_2 = 5$
$x_2 - \tilde{r}_2 = 2$
$x_3 + r_3 = 3$

Tab.2 Vstupuje premenná na hornej hranici

	$f(x_1, x_2, , x_3)$	3	5	2	0	0	
x_B	**c_B**	x_1	$\tilde{r}_2$	x_3	s_1	s_2	b
s_1	0	1	2	2	1	0	10
s_2	0	2	4	3	0	1	15
r_j		3	5↑	2	0	0	-

Riešenie

$x_1 = 0$	$r_1 = 4$	$s_1 = 10$
$x_2 = 2$	$\tilde{r}_2 = 0$	$s_2 = 15$
	$r_2 = 3$	
$x_3 = 0$	$r_3 = 3$	

$t_1 = 3 \qquad t_2 = \min\left\{ \frac{10}{2}, \frac{15}{4} \right\} = \frac{15}{4} \qquad t_3 = \infty$

$t = \min\{t_1, t_2, t_3\} = t_1$

Nie simplexová iterácia, ale substitúcia
$\tilde{r}_2 \rightarrow r_2$

Dostávame

$x_2 = 2 + \tilde{r}_2$

$0 \le \tilde{r}_2 \le 3 \qquad \tilde{r}_2 + r_2 = 3$

$0 \le x_1 \le 4$

$2 \le x_2 \le 5$

$0 \le x_3 \le 3$

$x_1 + r_1 = 4$

$x_2 + r_2 = 5$

$x_2 - \tilde{r}_2 = 2$

$x_3 + r_3 = 3$

$\tilde{r}_2 = 3 \in \mathbf{x_N}$

$r_2 = 0 \qquad \tilde{r}_2 = 3 - r_2$

Tab.3 **Vystupujúca premenná na dolnej hranici**

		$f(x_1, x_2, , x_3)$ 3	-5	2	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	r_2	x_3	s_1	s_2	b
s_1	0	1	-2	2	1	0	4
← s_2	0	2•	-4	3	0	1	3
r_j		3↑	-5	2	0	0	-

Riešenie

$x_1 = 0 \qquad r_1 = 4 \qquad s_1 = 4$

$x_2 = 5 \qquad \tilde{r}_2 = 3 \qquad s_2 = 3$

$r_2 = 0$

$x_3 = 0 \qquad r_3 = 3$

$t_1 = 4 \qquad t_2 = 3/2 \qquad t_3 = \infty$

$t = \min\{t_1, t_2, t_3\} = t_2$

Bežná simplexová iterácia

Dostávame

$x_1 = 3/2 \in \mathbf{x}_B$

$r_1 = 5/2$

$x_2 = 2 + \tilde{r}_2$

$0 \le \tilde{r}_2 \le 3 \qquad \tilde{r}_2 + r_2 = 3$

$0 \le x_1 \le 4$

$2 \le x_2 \le 5$

$0 \le x_3 \le 3$

$x_1 + r_1 = 4$

$x_2 + r_2 = 5$

$x_2 - \tilde{r}_2 = 2$

$x_3 + r_3 = 3$

Tab.3 Vystupujúca premenná na hornej hranici

	$f(x_1, x_2, , x_3)$	3	-5	2	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	r_2	x_3	s_1	s_2	b
s_1	0	0	0	1/2	1	-1/2	5/2
$\leftarrow x_1$	3	1	-2•	3/2	0	1/2	3/2
r_j		0	$1\uparrow$	-5/2	0	-3/2	-

Bežná simplexová iterácia so záporným kľúčovým prvkom

Riešenie

$x_1 = 3/2 \qquad r_1 = 5/2 \qquad s_1 = 5/2$

$x_2 = 5 \qquad \tilde{r}_2 = 3 \qquad s_2 = 0$

$r_2 = 0$

$x_3 = 0 \qquad r_3 = 3$

$t_1 = 3 \qquad t_2 = \infty \qquad t_3 = \min\left\{\frac{4 - 3/2}{2}\right\} = 5/4$

$t = \min\{t_1, t_2, t_3\} = t_3$

$x_2 = 2 + \tilde{r}_2$

$0 \le \tilde{r}_2 \le 3 \qquad \tilde{r}_2 + r_2 = 3$

$0 \le x_1 \le 4$

$2 \le x_2 \le 5$

$0 \le x_3 \le 3$

$x_1 + r_1 = 4$

$x_2 + r_2 = 5$

$x_2 - \tilde{r}_2 = 2$

$x_3 + r_3 = 3$

Dostávame

Tab.4 Nebázická premenná na hornej hranici

	$f(x_1, x_2, x_3)$	3	-5	2	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	r_2	x_3	s_1	s_2	b
s_1	0	0	0	1/2	1	-1/2	5/2
r_2	-5	-1/2	1	-3/4	0	-1/4	-3/4
r_j		1/2	1	-5/2	0	-3/2	-

Riešenie

$x_1 = 0 \qquad r_1 = 4 \qquad s_1 = 5/2$

$x_2 = 23/4 \qquad \tilde{r}_2 = 15/4 \qquad s_2 = 0$

$r_2 = -3/4$

$x_3 = 0 \qquad r_3 = 3$

Keďže

$x_1 = 4 \in \mathbf{x}_N$

$r_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4 - r_1$

Nie simplexová iterácia, ale substitúcia

$x_1 \to r_1$

$x_2 = 2 + \tilde{r}_2$

$0 \le \tilde{r}_2 \le 3 \qquad \tilde{r}_2 + r_2 = 3$

$0 \le x_1 \le 4$

$2 \le x_2 \le 5$

$0 \le x_3 \le 3$

$x_1 + r_1 = 4$

$x_2 + r_2 = 5$

$x_2 - \tilde{r}_2 = 2$

$x_3 + r_3 = 3$

Dostávame

Tab.4 Nebázická premenná na hornej hranici

	$f(x_1, x_2, x_3)$	-3	-5	2	0	0	
$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{c}_B$	r_1	r_2	x_3	s_1	s_2	b
s_1	0	0	0	1/2	1	-1/2	5/2
r_2	-5	1/2	1	-3/4	0	-1/4	5/4
r_j		-1/2	0	-7/4	0	-5/4	-

Riešenie - OPTIMÁLNE

$x_1 = 4 \qquad r_1 = 0 \qquad s_1 = 5/2$

$x_2 = 15/4 \qquad \tilde{r}_2 = 7/4 \qquad s_2 = 0$

$r_2 = 5/4$

$x_3 = 0 \qquad r_3 = 3$

$\mathbf{x} = (4, 15/4, 0)$

$f(\mathbf{x}) = 123/4$