Modely a metódy lineárneho a celočíselného programovania

(Tézy k prednáške č. 3)

Téma prednášky

Teória duality

Prof. Dr. Michal Fendek

Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Ekonomická univerzita Bratislava

Dolnozemská 1

852 35 Bratislava

Teória duality

Príklad:

- Preskúmajme firmu, ktorá má vo výrobnom programe definované dva výrobky: P_1 a P_2.

- Pri výrobe využíva firma dva výrobné faktory: PF1 A PF2.

- Informácie o normách spotreby jednotlivých výrobných faktorov, o disponibilných zásobách jednotlivých výrobných faktorov a o trhových cenách výrobkov sú uvedené v nasledujúcej tabuľke

TABUĽKA

	Produkt P1	Produkt P2	Kapacita
Výrobný faktor PF1	2	1	7
Výrobný faktor PF2	3	2	11
Cena	8	5	

Primárny problém – optimálna výrobná stratégia firmy (x_1, x_2) maximalizujúca výnosy z predaja produkcie

$$f(x_1, x_2) = 8x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

Pri ohraničeniach

$$2x_1 + x_2 \leq 7$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 11$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Duálny problém – optimálna marketingová stratégia konkurenčnej firmy, ktorá ma ambíciu sa na trhu monopolizovať a chce teda za tieňové ceny (u_1, u_2) odkúpiť od pôvodnej firmy jej zdroje v celých objemoch

$$g(u_1, u_2) = 7u_1 + 11u_2 \rightarrow \min$$

Pri ohraničeniach

$$2u_1 + 3u_2 \geq 8$$
$$u_1 + 2u_2 \geq 5$$
$$u_1, u_2 \geq 0$$

Primárno – Duálne úlohy

Symetrická dualita

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \mathbf{max}$$

p. o.

$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

kde

$\mathbf{A} \in R^{m \times n}, \ \mathbf{x}, \mathbf{c} \in R^n, \ \mathbf{b} \in R^m$

$$g(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T\mathbf{b} \to \min$$

p. o.

$$\mathbf{u}^T A \ge \mathbf{c}^T$$
$$\mathbf{u} \ge \mathbf{0}$$

kde

$\mathbf{A} \in R^{m \times n}, \ \mathbf{c} \in R^n, \ \mathbf{b}, \mathbf{u} \in R^m$

Nesymetrická dualita

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \mathbf{max}$$

p.o.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

kde

$\mathbf{A} \in R^{m \times n}, \ \mathbf{x}, \mathbf{c} \in R^n, \ \mathbf{b} \in R^m$

$$g(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{b} \to \min$$

p.o.

$$\mathbf{u}^T \mathbf{A} \ge \mathbf{c}^T$$
$$u_i \in (-\infty, \ \infty), i = 1, \dots, m$$

kde

$\mathbf{A} \in R^{m \times n}, \ \mathbf{c} \in R^n, \ \mathbf{b}, \mathbf{u} \in R^m$

Všeobecné pravidlá pre konštrukciu dvojice primárno – duálnych úloh LP

Primárna úloha		Duálna úloha	
Typ účelovej funkcie		**Typ účelovej funkcie**	
max (min)		**min (max)**	
Typ i-teho ohraničenia		**Typ i-tej duálnej premennej**	
max	**min**	**min**	**max**
$\leq$		$u_i \geq 0$	$u_i \leq 0$
$\geq$		$u_i \leq 0$	$u_i \geq 0$
$=$		u_i **voľná**	
Typ j-tej primárnej premennej		**Typ j-teho ohraničenia**	
max	**min**	**min**	**max**
$x_j \geq 0$		$\geq$	$\leq$
$x_j \leq 0$		$\leq$	$\geq$
x_j **voľná**		$=$	

Všeobecné pravidlá pre konštrukciu dvojice primárno – duálnych úloh LP

Príklad č.1

Formulujte duálnu úlohu k nasledovnej úlohe LP

$$f(\mathbf{x}) = 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 \to max$$

pri ohraničeniach

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 &\ge 9 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 &= 9 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \ge 0, x_3 \le 0, x_4 \text{ - voľná}$$

Skúmajme dvojicu symetricky duálnych úloh

{PU}: $$\max\left\{f(\mathbf{x})=\mathbf{c}^T\mathbf{x}\;\middle|\;\mathbf{Ax}\le\mathbf{b},\ \mathbf{x}\ge\mathbf{0},\ \mathbf{A}\in R^{m\times n},\ \mathbf{x},\mathbf{c}\in R^n,\mathbf{b}\in R^m\right\}$$

{DU}: $$\min\left\{g(\mathbf{u})=\mathbf{u}^T\mathbf{b}\;\middle|\;\mathbf{u}^T A\ge\mathbf{c}^T,\mathbf{u}\ge\mathbf{0},\ \mathbf{A}\in R^{m\times n},\ \mathbf{c}\in R^n,\ \mathbf{b},\mathbf{u}\in R^m\right\}$$

Poznámka: Výpočet optimálneho riešenia **{PU}** **a** **{DU}**

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^T\mathbf{A}&\ge\mathbf{c}^T\\ \mathbf{u}^T\mathbf{B}&=\mathbf{c}_B{}^T\\ \mathbf{u}^T&=\mathbf{c}_B{}^T\mathbf{B}^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^T&=\mathbf{c}^T-\mathbf{z}^T=\mathbf{c}^T-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\\ \mathbf{r}_B^T&=\mathbf{c}_B^T-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{c}_B^T-\mathbf{u}^T\mathbf{B}\\ \mathbf{r}_E^T&=\mathbf{c}_E^T-\mathbf{c}_E^T\mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}=\mathbf{c}_B^T-\mathbf{u}^T\mathbf{E}\\ \mathbf{r}_E^T&=\mathbf{c}_E^T-\mathbf{u}^T\\ \mathbf{u}^T&=\mathbf{c}_E^T-\mathbf{r}_E^T=\mathbf{0}-\mathbf{r}_E^T\\ \mathbf{u}^T&=-\mathbf{r}_E^T\end{aligned}$$

Príklad – primárna úloha

$$PÚ - OR:\ (x_1^*, x_2^*) = (3,1);\ \ f(x_1^*, x_2^*) = 29$$

$$f(x_1, x_1) = 8x_1 + 5x_2 \quad \rightarrow \quad max$$

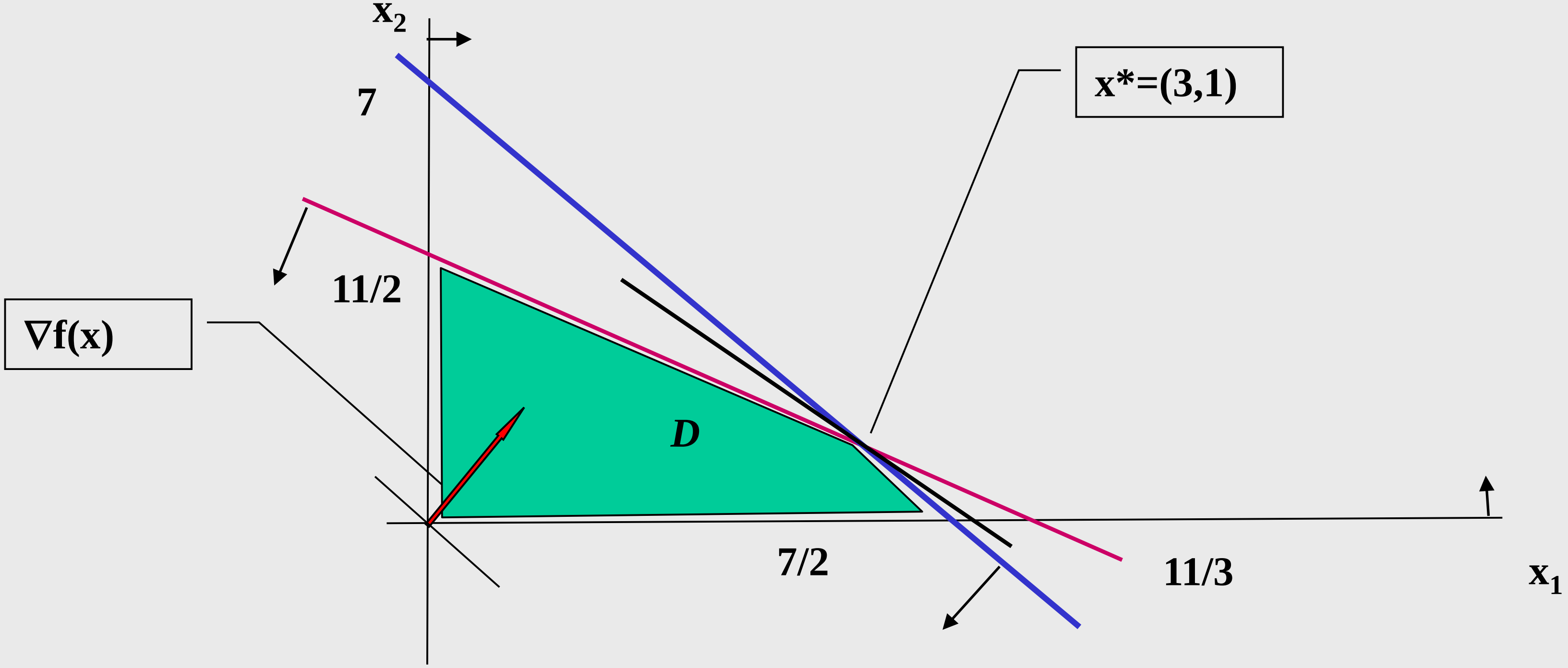
p.o.

$$2x_1 + x_2 \le 7$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 11$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Grafické riešenie úlohy



Príklad duálna úloha

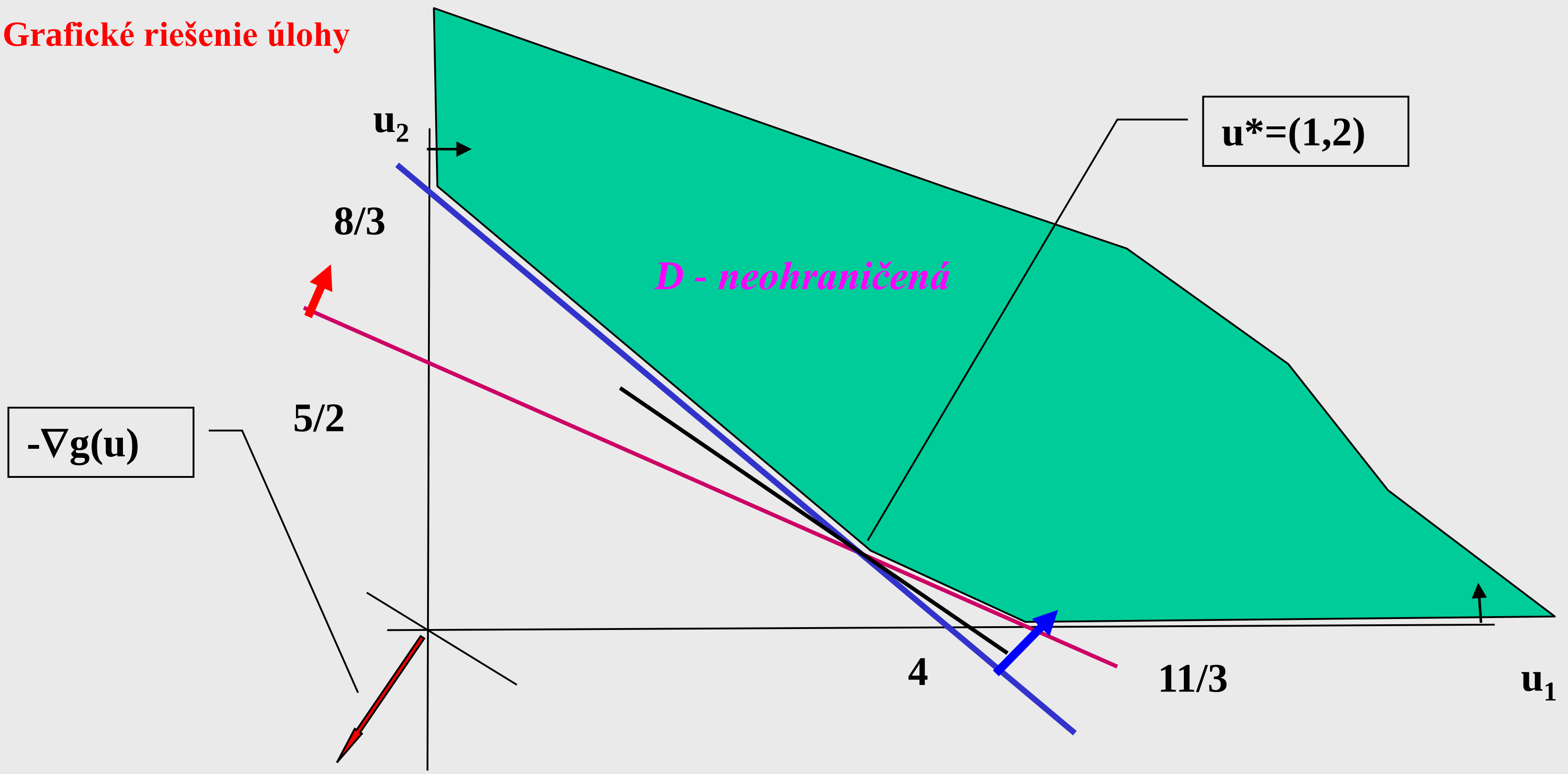
$$g(u_1,u_1)=7u_1+11u_2 \quad \rightarrow \quad max$$

$p.o.$

$$2u_1+3u_2\geq 8$$
$$u_1+2u_2\geq 5$$
$$u_1,u_2\geq 0$$

$DÚ-OR:\ (u_1^*,u_2^*)=(1,2);\ \ g(u_1^*,u_2^*)=29$

Grafické riešenie úlohy



Riešenie

Tab.1

		$f(x_1, x_2)$ 8	5	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	b
$\leftarrow s_1$	0	2•	1	1	0	7
s_2	0	3	2	0	1	11
r_j		8 ↑	5	0	0	0

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{11} \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Východiskové prípustné bázické riešenie VPBR:

$$\mathrm{B} = (\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2) = 0$$

$$(r_j) = \begin{pmatrix} \underbrace{8}_{\max} & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \leq 0$$

Teória duality v úlohách lineárneho programovania

1. Iteration

Tab.2

	$f(x_1, x_2)$	8	5	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	8	1	1/2	1	0	7/2
$\leftarrow s_2$	0	0	1/2•	-3/2	1	1/2
r_j		0	1↑	-8	0	28

Prípustné bázické riešenie po prvej iterácii:

$$\mathrm{B} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4) \quad \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2) = (7/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2)$$

$$f(x_1, x_2) = 28$$

$$(r_j) = \left(0 \quad \underbrace{1}_{\max} \quad -8 \quad 0 \right) \approx\leq 0$$

2. Iterácia

Tab.3

	$f(x_1, x_2)$	8	5	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	8	1	0	2	-1	3
x_2	5	0	1	-3	2	1
r_j		0	0	-1	-2	29

Optimálne bázické prípustné riešenie po 2. iterácii:

$$\mathrm{B} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) \quad \mathbf{x}^* = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2) = (3 \quad 1 \quad 0 \quad 0) \quad \mathbf{u}^* = -\mathbf{r}_{\mathbf{E}} = (1 \quad 2)$$

$$f(x_1^*, x_2^*) = 29$$

$$g(u_1^*, u_2^*) = 1 \times 7 + 2 \times 11 = 29$$

Slabá veta o dualite

Ak vektor **x** je prípustné riešenie {PU} a vektor **u** je prípustné riešenie {DU}.
Potom pre hodnoty ich účelových funkcií platí

$$\boxed{\max\ f(\mathbf{x}) \le \min\ g(\mathbf{u})}$$

Dôkaz:

Nech **x** je prípustné riešenie {PU}

u je prípustné riešenie {DU}

$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \quad \Big| \mathbf{u}_L^T$$
$$\mathbf{u}^T\mathbf{Ax} \le \mathbf{u}^T\mathbf{b}$$
$$\mathbf{u}^T\mathbf{Ax} \le g(\mathbf{u})$$

$$\mathbf{u}^T\mathbf{A} \ge \mathbf{c}^T \quad \Big| \mathbf{x}_P$$
$$\mathbf{u}^T\mathbf{Ax} \ge \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\mathbf{u}^T\mathbf{Ax} \ge f(\mathbf{x})$$

$$f(\mathbf{x}) \le \mathbf{u}^T\mathbf{Ax} \le g(\mathbf{u})$$

Silná veta o dualite

Ak jedna z dvojice duálnych úloh {PU}, resp. {DU} má optimálne riešenie, potom aj úloha k nej duálna má optimálne riešenie a pre hodnoty ich účelových funkcií platí

$$\boxed{f(\mathbf{x}^*) = g(\mathbf{u}^*)}$$

Dôkaz:

$$\exists\, OR : \mathbf{B}^* \Rightarrow \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{*-1}\mathbf{b} \in D$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{c}^{\mathbf{T}} - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{A} \le \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}^{\mathbf{T}} - \mathbf{u}^T\mathbf{A} \le \mathbf{0} \ldots\ldots \mathbf{u} : PR\ DU$$

$$\wedge\ \mathbf{u}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{*-1} \ldots\ldots \mathbf{u} : OR\ DU$$

$$f(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}_{\mathbf{B}}^*) = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T\mathbf{x}_{\mathbf{B}}^*$$

$$\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T\mathbf{x}_{\mathbf{B}}^* = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T\mathbf{B}^{-1*}\mathbf{b} = \mathbf{u}^{T*}\mathbf{b} = g(\mathbf{u}^*)$$

$$\Rightarrow$$

$$f(\mathbf{x}^*) = g(\mathbf{u}^*)$$

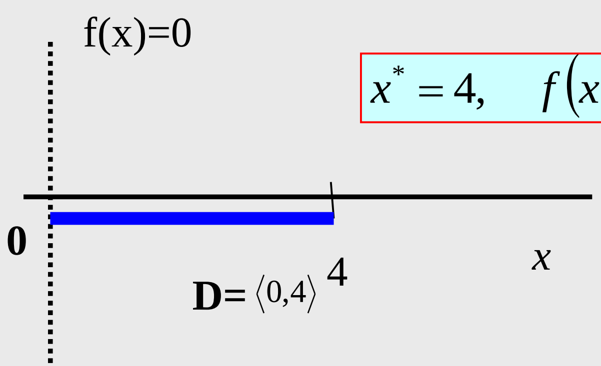
$q.e.d$

Vzťahy medzi riešeniami dvojice duálnych úloh LP

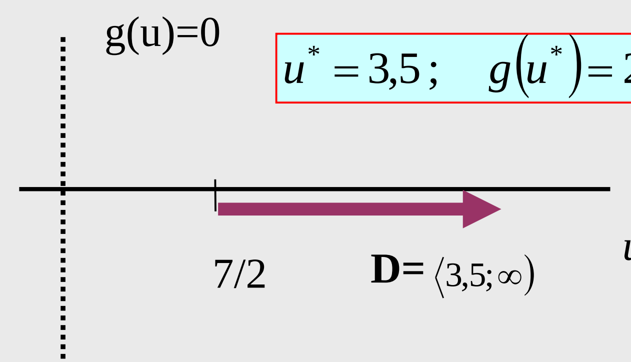
I. Existuje OR {PU} **x*** a OR {DU} **u*,** pričom pre hodnoty ich účelových funkcií platí

$$\boxed{f(\mathbf{x}^*) = g(\mathbf{u}^*)}$$

PU	*DU*
$f(x) = 7x \to \max$	$g(u) = 8u \to \min$
p.o.	*p.o.*
$2x \leq 8$	$2u \geq 7$
$x \geq 0$	$u \geq 0$



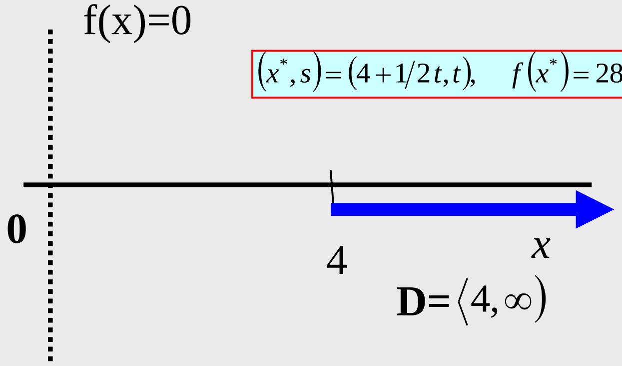
$x^* = 4, \quad f(x^*) = 28$

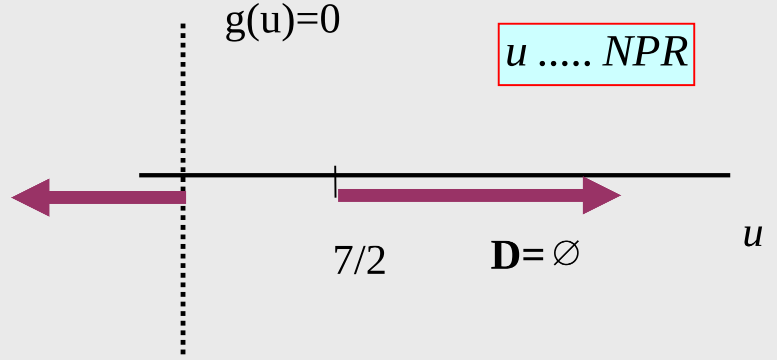


$u^* = 3{,}5\,; \quad g(u^*) = 28$

II. Existuje PR {PU} **x** ale účelová funkcia je na množine prípustných riešení zhora neohraničená. Potom {DU} nemá prípustné riešenie

PU	*DU*
$f(x) = 7x \to \max$	$g(u) = 8u \to \min$
p.o.	*p.o.*
$2x \geq 8$	$2u \geq 7$
$x \geq 0$	$u \leq 0$

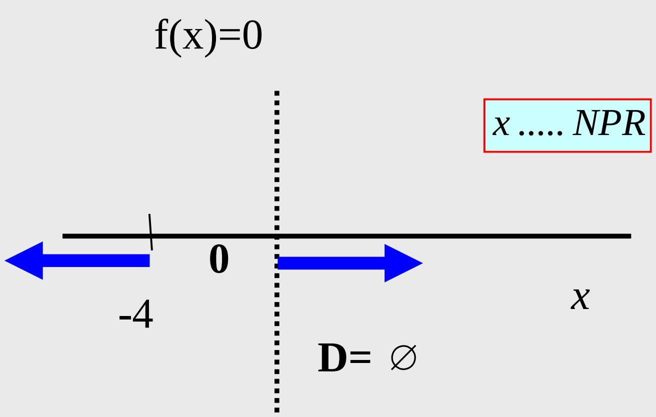




III. Existuje PR {DU} **u** ale účelová funkcia je na množine prípustných riešení zdola neohraničená. Potom {PU} nemá prípustné riešenie

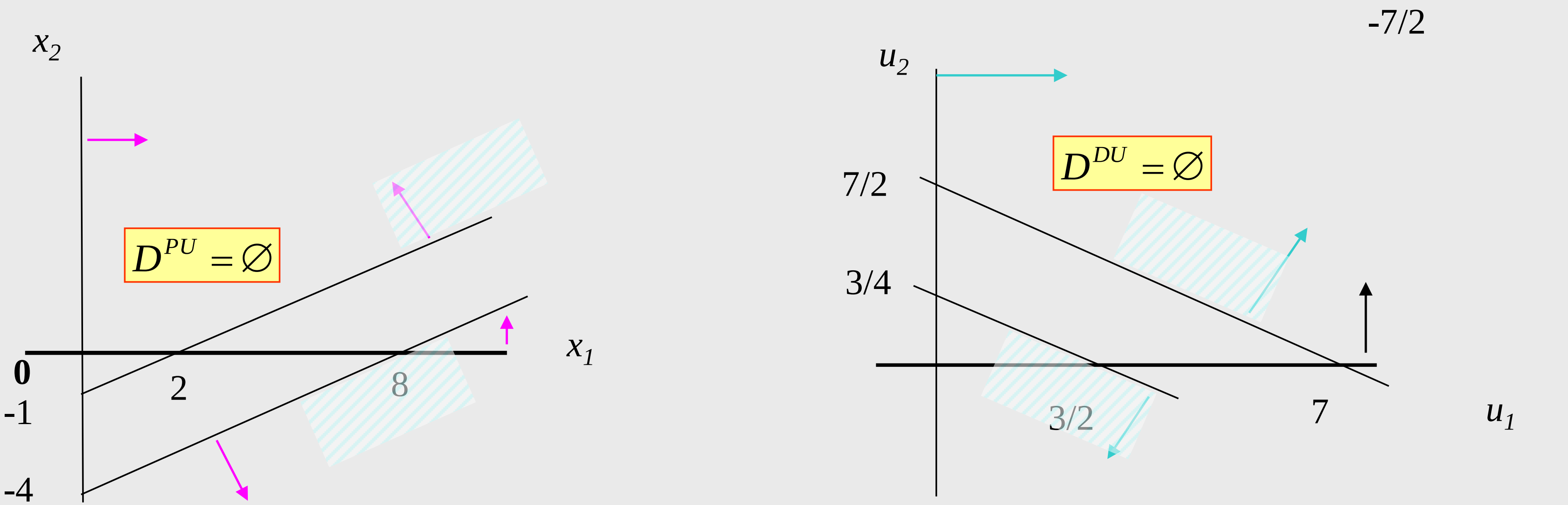
PU	*DU*
$f(x) = 7x \to \max$	$g(u) = 8u \to \min$
p.o.	*p.o.*
$-2x \geq 8$	$-2u \geq 7$
$x \geq 0$	$u \leq 0$

$$(u^*, s) = (-7/2 - 1/2t, t), \quad g(u^*) = -28 - 8t \to_{t\to\infty} -\infty$$



IV. Ani jedna z dvojice duálnych úloh, t. j. ani {PU} ani {DU}nemá prípustné riešenie.

PU	DU
$f(x)=7x_1-3x_2 \rightarrow \max$	$g(u)=8u_1+4u_2 \rightarrow \min$
p.o.	*p.o.*
$x_1-2x_2 \geq 8$	$u_1+2u_2 \geq 7$
$2x_1-4x_2 \leq 4$	$-2u_1-4u_2 \geq -3$
$x_1, x_2 \geq 0$	$u_1 \leq 0,\ u_2 \geq 0$



Veta o rovnováhe (komplementárnosti doplnkových premenných)

Pre optimálne riešenia **x*, u*** dvojice duálnych úloh {PU}, resp. {DU} platí

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right)u_i = 0 \qquad pre\ \forall i = 1,\ldots,m$$
$$\wedge$$
$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* - c_j\right)x_j = 0 \qquad pre\ \forall j = 1,\ldots,n$$

resp.

$$s_i^{PU}u_i = 0 \qquad pre\ \forall i = 1,\ldots,m$$
$$\wedge$$
$$s_j^{DU}x_j = 0 \qquad pre\ \forall j = 1,\ldots,n$$

Využitie vety o rovnováhe

Príklad č.2

S použitím vety o rovnováhe vypočítajte optimálne riešenie nasledovnej primárnej úlohy, ak optimálne riešenie duálnej úlohy je nasledovné:

$$\mathbf{u} = [2, -1, 1]$$

ULP:

$$f(\mathbf{x}) = 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 \rightarrow max$$

pri ohraničeniach

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\leq 5 \\ 3x_1 + x_2 + \phantom{2x_3 +{}} x_4 &\geq 9 \\ 2x_1 + \phantom{x_2 +{}} x_3 + 2x_4 &= 9 \\ x_1, x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0,\ x_4 &- \text{voľná} \end{aligned}$$

Duálny algoritmus Simplexovej metódy

Daná je ÚLP v tvare

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min \qquad \mathbf{c}^T \geq 0$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

I.Etapa Inicializačná: Stanovenie východiskového prípustného bázického riešenia (VPBR) duálnej úlohy

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{E}\mathbf{s} = \mathbf{b} \ / \ .(-1)$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow$$

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min$$
$$-\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{s} = -\mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = (\mathbf{0}, -\mathbf{b}) \ \ldots NPR$$

- **Číslo iterácie** $p = 0$
- **Predpoklady:**

$$\widetilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, \mathbf{E}) \in R^{m \times (n+m)}; \ h(\mathbf{A}, \mathbf{E}) = m$$
$$\mathbf{c} \in R^n \ ; \ (\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in R^n \qquad \Rightarrow$$
$$\mathrm{b} \in R^m$$

Dostávame VBR PU a DU
v tvare

$$\mathbf{A} = \mathbf{N};\ \mathbf{E} = \mathbf{B}_p$$

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}}^p = \mathbf{s};\ \mathbf{x}_{\mathbf{N}}^p = \mathbf{x}$$

PU

$$(\mathbf{N}, \mathbf{B}_p)\begin{pmatrix}\mathbf{x}_{\mathbf{N}}^p \\ \mathbf{x}_{\mathbf{B}}^p\end{pmatrix} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_{\mathbf{B}}^p = \mathbf{s} = -\mathbf{b} \qquad \mathbf{x}_{\mathbf{N}}^p = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{x}^p = (\mathbf{x}_{\mathbf{N}}^p, \mathbf{x}_{\mathbf{B}}^p) = (\mathbf{0}, \mathbf{s}) = (\mathbf{0}, -\mathbf{b})\ NPR\ PU$$

DU

$$\mathbf{u}^p = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{B}_p^{-1} = \mathbf{0}.\mathbf{E} = \mathbf{0} \ \Rightarrow$$

$$KO:\ \mathbf{r}^p = \mathbf{c}^T - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{B}_p^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{c}^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A} = \mathbf{c}^T - \mathbf{0A} = \mathbf{c}^T \geq \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}^p \ \ldots..\ \ PRDU$$

Zaveďme nasledovnú
substitúciu:

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{A}};\ \ \mathbf{X}_j = \mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}_j,\ j = 1, \ldots, n;\ \tilde{\mathbf{A}} = \left[\tilde{\mathbf{A}}_j\right]_{j=1}^{n+m};\ \ \tilde{\mathbf{A}}_j = \left[a_{ij}\right]_{i=1}^{m}$$

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{B}^{-1}\,\mathrm{b};\quad \mathbf{X} \in R^{m\times(n+m)};\ \ \mathbf{X}_0 \in R^{m\times 1};$$

$\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$ **II**

II. Etapa: Výpočet optimálneho riešenia ÚLP - OR

1^0 Test optimálnosti (Určenie *vystupujúcej* premennej)

• Výpočet BPR PUvektora redukovaných ocenení premenných

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}}^{p} = \mathbf{B}_{p}^{-1}\mathbf{b}$$

1.1 keď $x_{i0}^{p} \geq 0 \quad pre \quad \forall\, i = 1, \ldots, m$ potom $\mathbf{x}_{\mathbf{B}}^{p}$ je OR ULP, $\mathbf{B}_p = \mathbf{B}^*$; STOP

1.2 keď $\exists_i\, x_{i0}^{p} < 0 \quad \Rightarrow$ potom

$$x_{L0}^{p} = \min_{x_{i0}^{p} < 0} x_{i0}^{p} \quad pre \quad \forall\, i = 1, \ldots, m$$

• *l-tý* bázický stĺpcový vektor je vystupujúci z aktuálnej bázy
• *l-tá* bázická premenná je vystupujúca
• *l*-tý riadkový vektor simplexovej tabuľky je pivotný

• $\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow$ 2^0

2^0 Určenie *vstupujúcej* premennej

2.1 Keď $x_{Lj} \geq 0, \quad pre \quad \forall j = 1,\ldots,n \;\Big|\Rightarrow$ **PU nemá prípustné riešenie ⇒ STOP**

2.2 Ak $\underset{j=1,\ldots,n}{\exists} \; x_{Lj} < 0 \;\Big|\Rightarrow$

vypočítame

$$\left|\frac{c_k - z_k}{x_{Lk}}\right| = \min_{x_{Lj}<0} \left\{ \left|\frac{c_j - z_j}{x_{Lj}}\right| \right\}, \; \forall j = 1,\ldots,n$$

potom

- ***k*-tý nebázický stĺpcový vektor A_k vstupuje do bázy**
- **zodpovedajúca nebázická premenná je vystupujúca**
- ***k*-tý stĺpcový vektor simplexovej tabuľky je pivotný**
- **prvok simplexovej tabuľky x_{lk}, ktorý je priesečníkom pivotného riadku a stĺpca je pivotným prvkom elementárnej zmeny bázy**

• ⇒ ⇒ ⇒ **3^0**

3^0 Elementárna zmena bázy s pivotným prvkom x_{lk}

Všetky prvky simplexovej tabuľky sú z matice

$$\mathbf{X} = \left[x_{ij}\right]_{i=1,\dots,m}^{j=0,1,\dots,n+m}$$

Na maticu

$$\tilde{\mathbf{X}} = \left[\tilde{x}_{ij}\right]_{i=1,\dots,m}^{j=0,1,\dots,n+m}$$

Podľa nasledovnej formuly transformované

$$\tilde{\mathbf{X}} = \left[\tilde{x}_{ij}\right]_{i=1,\dots,m}^{j=0,1,\dots,n+m} \;\Bigg|\; \tilde{x}_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} & pre \;\; i = l \\[2ex] x_{ij} - \dfrac{x_{lj}\,x_{ik}}{x_{lk}} & pre \;\; i \neq l \end{array} \right\} \; j = 0,1,\dots,n+m$$

Potom položíme

a) $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}}$, $\quad \left[x_{ij}\right]_{i=1,\dots,m}^{j=0,1,\dots,n+m} = \left[\tilde{x}_{ij}\right]_{i=1,\dots,m}^{j=0,1,\dots,n+m}$

b) **Číslo iterácie** $p = p + 1$

• $\Rightarrow\;\Rightarrow\;\Rightarrow$ **návrat na krok 1^0**

Príklad:

Nasledovnú úlohu LP riešte s použitím *DASM*

$$f(x_1, x_1) = 2x_1 + 3x_2 \quad \rightarrow \quad min$$

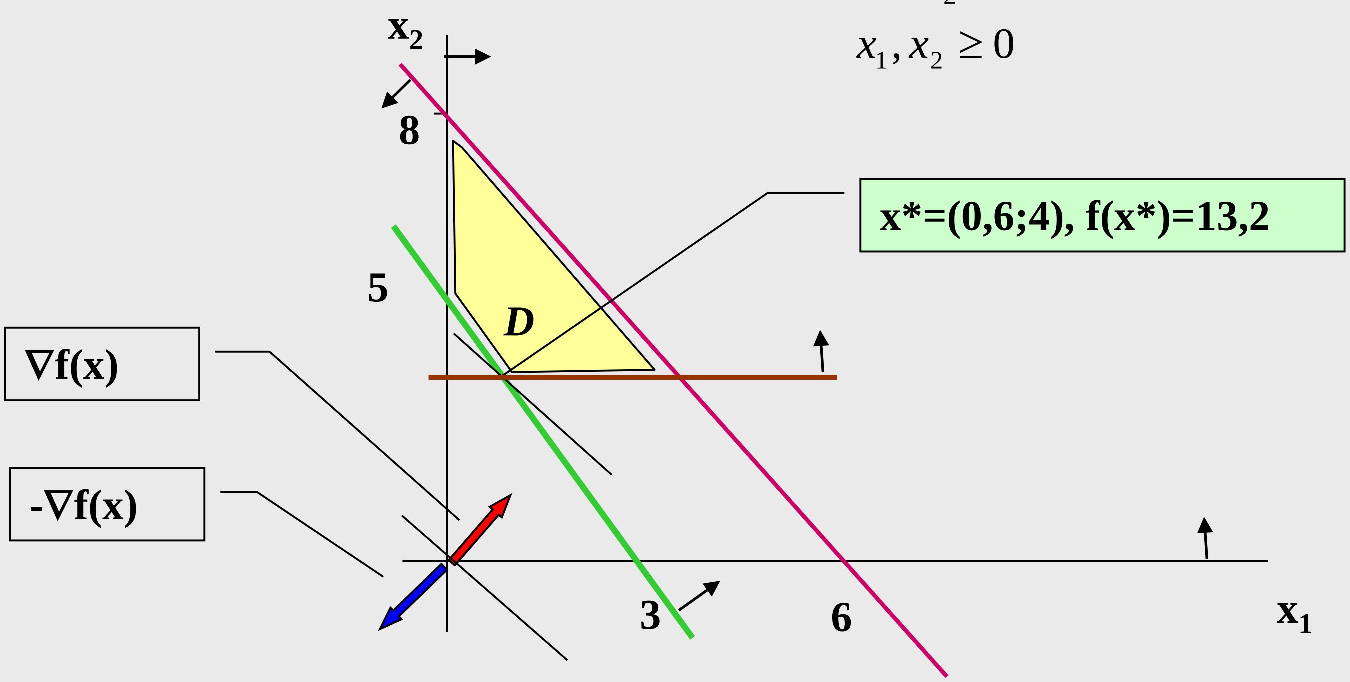
$$p.o.$$

$$5x_1 + 3x_2 \geq 15$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Inicializačná etapa:

ULP štandardný tvar

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_1) = 2x_1 + 3x_2 \quad \rightarrow \quad min \\
& p.o. \\
& 5x_1 + 3x_2 - s_1 = 15 \\
& 4x_1 + 3x_2 + s_2 = 24 \\
& x_2 - s_3 = 4 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

-

Východiskové duálne prípustné riešenie

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_1) = 2x_1 + 3x_2 \quad \rightarrow \quad min \\
& p.o. \\
& -5x_1 - 3x_2 + s_1 = -15 \\
& 4x_1 + 3x_2 + s_2 = 24 \\
& -x_2 + s_3 = -4 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Riešenie

Tab.1

	$f(x_1, x_2)$	2	3	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
$\leftarrow s_1$	0	-5•	-3	1	0	0	-15
s_2	0	4	3	0	1	0	24
s_3	0	0	-1	0	0	1	-4
r_j		2 ↑	3	0	0	0	0

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -15 \\ 24 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Východiskové duálne prípustné bázické riešenie:

$$\mathrm{B} = (\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5) \quad \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_2) = (0 \quad 0 \quad -15 \quad 24 \quad -4)$$

$$f(x_1, x_2) = 0 \quad \mathbf{u} = (u_1 \quad u_2 \quad u_3) = (0 \quad 0 \quad 0)$$

$$(r_j) = (2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \geq 0 \Rightarrow KO: \quad OK$$

$$x_{L0}^p = \min_{x_{i0}^p < 0} x_{i0}^p = \min_{x_{i0}^p < 0} \{-15, -4\} = x_{10}$$

$$\left| \frac{c_k - z_k}{x_{Lk}} \right| = \min_{x_{Lj} < 0} \left\{ \left| \frac{c_j - z_j}{x_{Lj}} \right| \right\} = \min_{x_{Lj} < 0} \left\{ \left| \frac{2}{-5} \right|, \left| \frac{3}{-3} \right| \right\} = \frac{2}{5} = \left| \frac{c_1 - z_1}{x_{11}} \right|$$

Riešenie

Tab.2

	$f(x_1, x_2)$	2	3	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
x_1	2	1	3/5	-1/5	0	0	3
s_2	0	0	3/5	4/5	1	0	12
← s_3	0	0	-1•	0	0	1	-4
r_j		0	9/5↑	2/5	0	0	6

Duálne prípustné bázické riešenie:

$$\mathrm{B} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5) \quad \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_2) = (3 \quad 0 \quad 0 \quad 12 \quad -4)$$

$$f(x_1, x_2) = 6 \quad \mathbf{u} = (u_1 \quad u_2 \quad u_3) = (2/5 \quad 0 \quad 0)$$

$$(r_j) = (0 \quad 9/5 \quad 2/5 \quad 0 \quad 0) \geq 0 \Rightarrow KO: \quad OK$$

Riešenie

Tab.2

	$f(x_1, x_2)$	2	3	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
x_1	2	1	0	-1/5	0	3/5	3/5
s_2	0	0	0	4/5	1	3/5	48/5
x_2	3	0	1	0	0	-1	4
r_j		0	0	2/5	0	9/5	66/5

Optimálne primárne a duálne bázické riešenie:

$$B^* = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_2) \quad \mathbf{x}^* = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_2) = (3/5 \quad 4 \quad 0 \quad 48/5 \quad 0)$$

$$f(x_1, x_2) = 66/5 \quad \mathbf{u}^* = (u_1 \quad u_2 \quad u_3) = (2/5 \quad 0 \quad 9/5)$$

$$g(u_1, u_2, u_3) = 66/5 = f(x_1, x_2)$$

$$(r_j) = (0 \quad 0 \quad 2/5 \quad 0 \quad 9/5) \geq 0 \Rightarrow KO: \quad OK$$

Príklad:

Nasledovnú úlohu LP riešte s použitím *DASM*

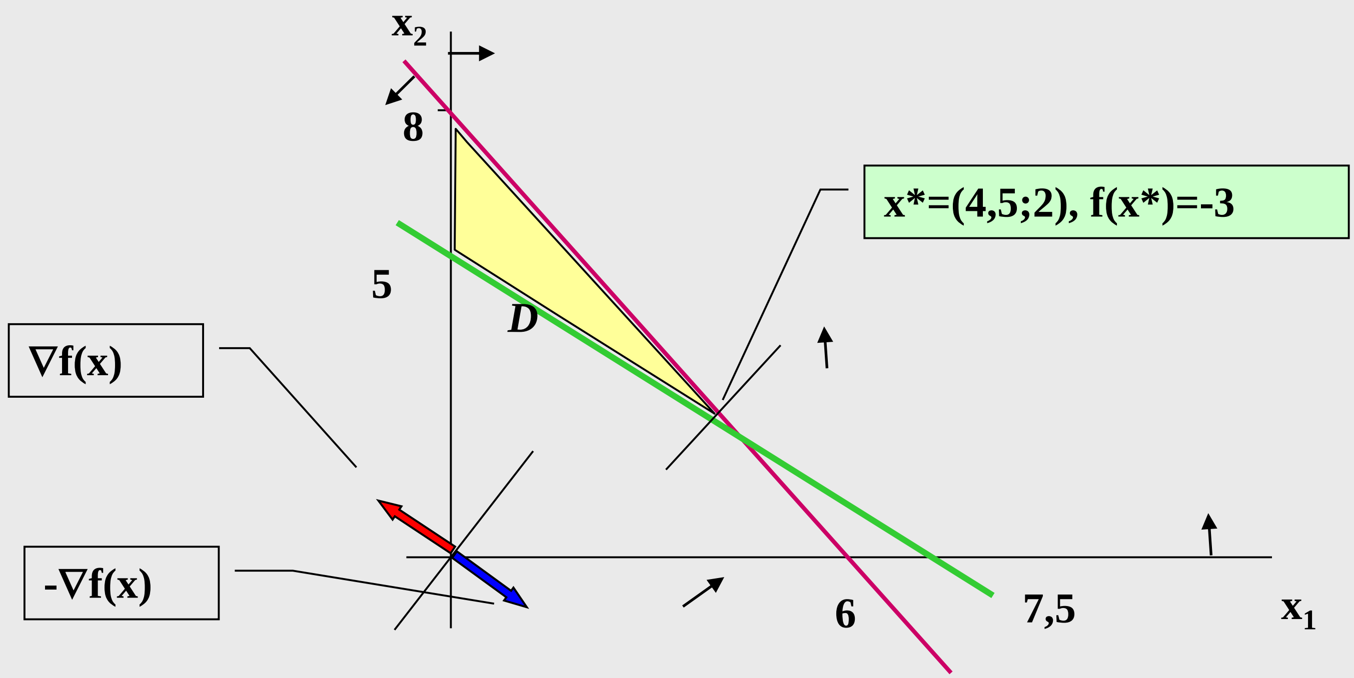
$$f(x_1, x_1) = -2x_1 + 3x_2 \quad \rightarrow \quad min$$

$$p.o.$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 15$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



ULP štandardný tvar

$$f(x_1, x_1) = -2x_1 + 3x_2 \quad \to \quad min$$

$p.o.$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - s_1 \quad &= 15 \\ 4x_1 + 3x_2 \quad + s_2 &= 24 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, &\geq 0 \end{aligned}$$

Východiskové duálne neprípustné riešenie !!!!

-

$$f(x_1, x_1) = -2x_1 + 3x_2 \quad \to \quad min$$

$p.o.$

$$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 + s_1 \quad &= -15 \\ 4x_1 + 3x_2 \quad + s_2 &= \ \ 24 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

DU

$$\mathbf{u}^p = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{B}_p^{-1} = \mathbf{0}.\mathbf{E} = \mathbf{0} \ \Rightarrow$$

$$KO: \ \mathbf{r}^p = \mathbf{c}^T - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{B}_p^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{c}^T - \mathbf{u}^T \mathbf{A} = \mathbf{c}^T - \mathbf{0A} = \mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx\geq \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}^p \ ..... \ NPRDU$$

Duálny algoritmus Simplexovej metódy – pre alternajúce znamienka koeficientov účelovej funkcie

Daná je ÚLP v tvare

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min \quad \mathbf{c}^T \{\geq, \leq\} 0$$
$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Zavedenie korekčného ohraničenia pre elimináciu duálnej neprípustnosti východiskového riešenia

$$C = \{ j \in 1,\dots,n \mid c_j < 0 \} \Rightarrow \sum_{j \in C} x_j \leq M$$
$$\sum_{j \in C} x_j + x_c = M$$
$$x_j, x_c \geq 0, \quad j = 1,\dots,n \quad M \to \infty$$

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min$$
$$-\mathbf{Ax} + \mathbf{Es} = -\mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = (\mathbf{0}, -\mathbf{b}) \quad \dots NPR$$

Doplnenie korekčného ohraničenia

$$C = \{ j \in 1,\dots,n \mid c_j < 0 \} \Rightarrow \sum_{j \in C} x_j \le M$$

$$\sum_{j \in C} x_j \quad + x_c \quad = \quad M$$

$$x_j, x_c \ge 0, \quad j = 1,\dots,n \quad M \to \infty$$

$$f(x_1, x_1) = -2x_1 + 3x_2 \quad \to \quad min$$

$p.o.$

$$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 + s_1 \qquad &= -15 \\ 4x_1 + 3x_2 \qquad + s_2 &= \quad 24 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &\le \quad M \\ x_1 \quad + x_c &= \quad M \\ x_c \ge 0, \quad M &\to \infty \end{aligned}$$

$$f(x_1, x_1) = -2x_1 + 3x_2 \quad \to \quad min$$

$p.o.$

$$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 + s_1 \qquad \qquad &= -15 \\ 4x_1 + 3x_2 \qquad + s_2 \qquad &= \quad 24 \\ x_1 \qquad \qquad + x_c &= \quad M, \\ x_1, x_2, s_1, s_2, x_c \ge 0, \ M &\to \infty \end{aligned}$$

Riešenie

Tab.1

	$f(x_1, x_2)$	-2	3	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	x_c	b
s_1	0	-2	-3	1	0	0	-15
s_2	0	4	3	0	1	0	24
$\leftarrow x_c$	0	1•	0	0	0	1	M
r_j		-2 $\uparrow$	3	0	0	0	0

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -15 \\ 24 \\ M \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Východiskové duálne a aj primárne neprípustné bázické riešenie:

$$\mathrm{B} = (\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & x_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -15 & 24 & M \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2) = 0 \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(r_j) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx\geq 0 \Rightarrow KO: \ ???$$

Tab.2

		$f(x_1, x_2)$	-2	3	0	0	0	
	x_B	**c_B**	x_1	x_2	s_1	s_2	x_c	b
	s_1	0	0	-3	1	0	2	-15+2M
	$\leftarrow s_2$	0	0	3	0	1	-4●	24-4M
	x_1	-2	1	0	0	0	1	M
	r_j		0	3	0	0	2↑	-2M

Východiskové duálne prípustné a primárne neprípustné bázické riešenie:

$$\mathrm{B} = \left(\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_1\right) \quad \mathbf{x} = \left(x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad x_c\right) = \left(M \quad 0 \quad -15+2M \quad 24-4M \quad M\right)$$

$$f\left(x_1, x_2\right) = -2M \quad \mathbf{u} = \left(u_1 \quad u_2 \quad u_3\right) = \left(0 \quad 0 \quad 2\right)$$

$$\left(r_j\right) = \left(0 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 2\right) \geq 0 \Rightarrow KO: \ OK$$

Tab.3

	$f(x_1, x_2)$	-2	3	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	x_c	b
$\leftarrow s_1$	0	0	-1,5•	1	1/2	0	-3
x_c	0	0	-3/4	0	-1/4	1	M-6
x_1	-2	1	3/4	0	1/4	0	6
r_j		0	3/2↑	0	1/2	0	-12

Aktuálne duálne prípustné a primárne neprípustné bázické riešenie:

$$\mathrm{B} = (\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_6, \mathbf{A}_1) \quad \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad x_c) = (6 \quad 0 \quad -3 \quad M-6 \quad 0)$$

$$f(x_1, x_2) = 0 \quad \mathbf{u} = (u_1 \quad u_2 \quad u_3) = (0 \quad 1/2 \quad 0)$$

$$(r_j) = (0 \quad 3/2 \quad 0 \quad 1/2 \quad 0) \geq 0 \Rightarrow KO: \ OK$$

Tab.4

	$f(x_1, x_2)$	-2	3	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	x_c	b
x_2	3	0	1	-2/3	-1/3	0	2
x_c	0	0	0	-1/2	-1/2	1	M-9/2
x_1	-2	1	0	1/2	1/2	0	9/2
r_j		0	0	3	2	0	-3

Aktuálne duálne prípustné a primárne prípustné bázické riešenie: OPTIMALNE RIESENIE

$$\mathrm{B} = (\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_1) \quad \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad x_c) = (9/2 \quad 2 \quad \quad 0 \quad M - 9/2)$$

$$f(x_1, x_2) = -3 \quad \mathbf{u} = (u_1 \quad u_2 \quad u_3) = (3 \quad -2 \quad 0)$$

$$g(u_1, u_2, u_3) = -3$$

$$(r_j) = (0 \quad 0 \quad 3 \quad 2 \quad 0)$$

$$\geq 0 \Rightarrow KO: \; OK$$