Modely a metódy lineárneho a celočíselného programovania

(Tézy k prenáške č. 2)

Téma prednášky

***Simplexová metóda** - dvojfázový algoritmus*

(Časť 2)

Prof. Dr. Michal Fendek

Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Ekonomická univerzita Bratislava

Dolnozemská 1

852 35 Bratislava

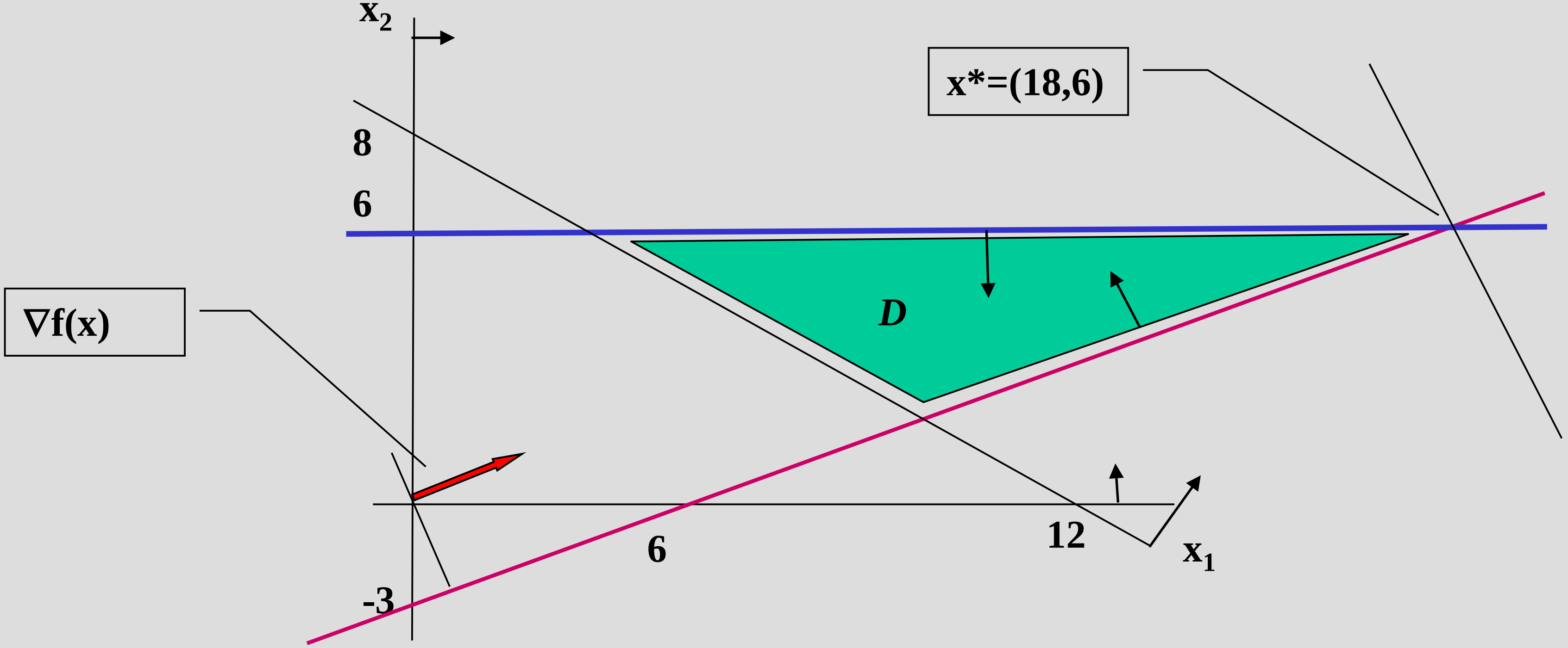
Príklad 4

$$f(x_1, x_1) = 3x_1 + 2x_2 \quad \rightarrow \quad max$$

p.o.

$$x_1 - 2x_2 \le 6$$
$$2x_1 + 3x_2 \ge 24$$
$$2x_2 \le 12$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Grafické riešenie úlohy



Dvojfázový algoritmus simplexovej metódy [Dantzig]

Daná je úloha lineárneho programovania

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min$$
$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \qquad \textbf{(ULP)}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

- **Motivácia zavedenia umelých premenných**
- **Stanovenie východiskového prípustného bázického riešenia (VPBR)**

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max \qquad\qquad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$$
$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ax} - \mathbf{Es} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad\qquad \mathbf{x}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$$

- Predpoklady:

$$\widetilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, -\mathbf{E}) \in R^{m \times (n+m)};\ h(\mathbf{A}, -\mathbf{E}) = m$$
$$\mathbf{c} \in R^n;\ (\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in R^n \qquad \Rightarrow$$
$$\mathrm{b} \in R^m$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{N}; -\mathbf{E} = \mathbf{B}_p \qquad f(\mathbf{x}) = (\mathbf{c}_N, \mathbf{c}_B)\begin{pmatrix}\mathbf{x}^p_{\mathbf{N}} \\ \mathbf{x}^p_{B}\end{pmatrix} \to \max$$

$$\mathbf{x}^p_{\mathbf{B}} = \mathbf{s}; \ \mathbf{x}^p_{\mathbf{N}} = \mathbf{x}$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{N}, \mathbf{B}_p)\begin{pmatrix}\mathbf{x}^p_{\mathbf{N}} \\ \mathbf{x}^p_{\mathbf{B}}\end{pmatrix} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{x}^p_{\mathbf{N}} = 0 \ \Rightarrow$$

Dostaneme neprípustné východiskové bázické riešenie (číslo iterácie *p=0*)

$$\boxed{\begin{aligned}&-\mathbf{E}\mathbf{s} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x}^0 = (\mathbf{x}^0_{\mathbf{N}}, \mathbf{x}^0_{\mathbf{B}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{s}) = (\mathbf{0}, -\mathbf{b}) \cdots \mathrm{NPVBR}\end{aligned}}$$

Zavedieme ***umelé premenné***:

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{E}\mathbf{s} + \mathbf{E}\mathbf{w} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \\ &\mathbf{x}^0 = (\mathbf{x}^0_{\mathbf{N}}, \mathbf{x}^0_{\mathbf{B}}) = \left(\underbrace{\mathbf{x}, \mathbf{s}}_{\mathbf{x}^0_{\mathbf{N}}}, \underbrace{\mathbf{w}}_{\mathbf{x}^0_{B}}\right) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{b}) \cdots \mathrm{PBR}\end{aligned}}$$

Dostávame ULP v štandardnom tvare

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \to \min \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{E}\mathbf{s} + \mathbf{E}\mathbf{w} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad \text{(LOP\_SF)}$$

a VBR je potom už prípustné

$$\mathbf{x}^0 = \left(\mathbf{x}^0_{\mathbf{N}}, \mathbf{x}^0_{\mathbf{B}}\right) = (\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{w}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{b})$$

Ale toto riešenie úlohy ULP_SF obsahuje umelé premenné $\Rightarrow$

!!! $\mathbf{x}^0$ nie je teda riešenie pôvodnej ULP

I. Fáza Eliminácia umelých premenných z bázického riešenia úlohy

- Pre elimináciu umelých premenných z bázického riešenia úlohy zavedieme tzv. pomocnú funkciou (minimalizačnú)

$$h(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{m} w_i \to \min$$

• **Riešime U LP_SF s minimalizačnou pomocnou funkciou**

$$h(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{m} w_i \to \min$$

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{Es} + \mathbf{Ew} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}$$

Optimálne riešenie:

- **Báza: B***
- **Vektor riešenia: (x*,s*,w*)**
- **Hodnota pomocnej účelovej funkcie:** $h(\mathbf{w}^*)$

Dve možnosti:

I.1 $h(\mathbf{w}^*)=0$

• potom prvá fáza skončila úspešne
• všetky umelé premenné w_i sú nebázické
• s optimálnym riešením prvej fázy algoritmu pokračujeme v druhej fáze

• ⇒ ⇒ ⇒ **prechod na Fázu II**

I.2 $h(\mathbf{w}^*)>0$

• najmenej jedna umelá premenná je bázická
• pôvodná ULP nemá prípustné riešenie
• optimálne riešenie prvej fázy je tzv. ***pseudooptimálne riešenie*** ULP

• **STOP**

II. Fáza: Riešenie pôvodnej ULP (bez umelých premenných)

- **VPBR pre 2. fázu algoritmu je OR z 1. fázy algoritmu**
- **Riešime ULP_SF s pôvodnou účelovou funkciou**

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \rightarrow \min$$
$$\mathbf{Ax} - \mathbf{Es} + \mathbf{Ew} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}$$

s použitím základného algoritmu SM.

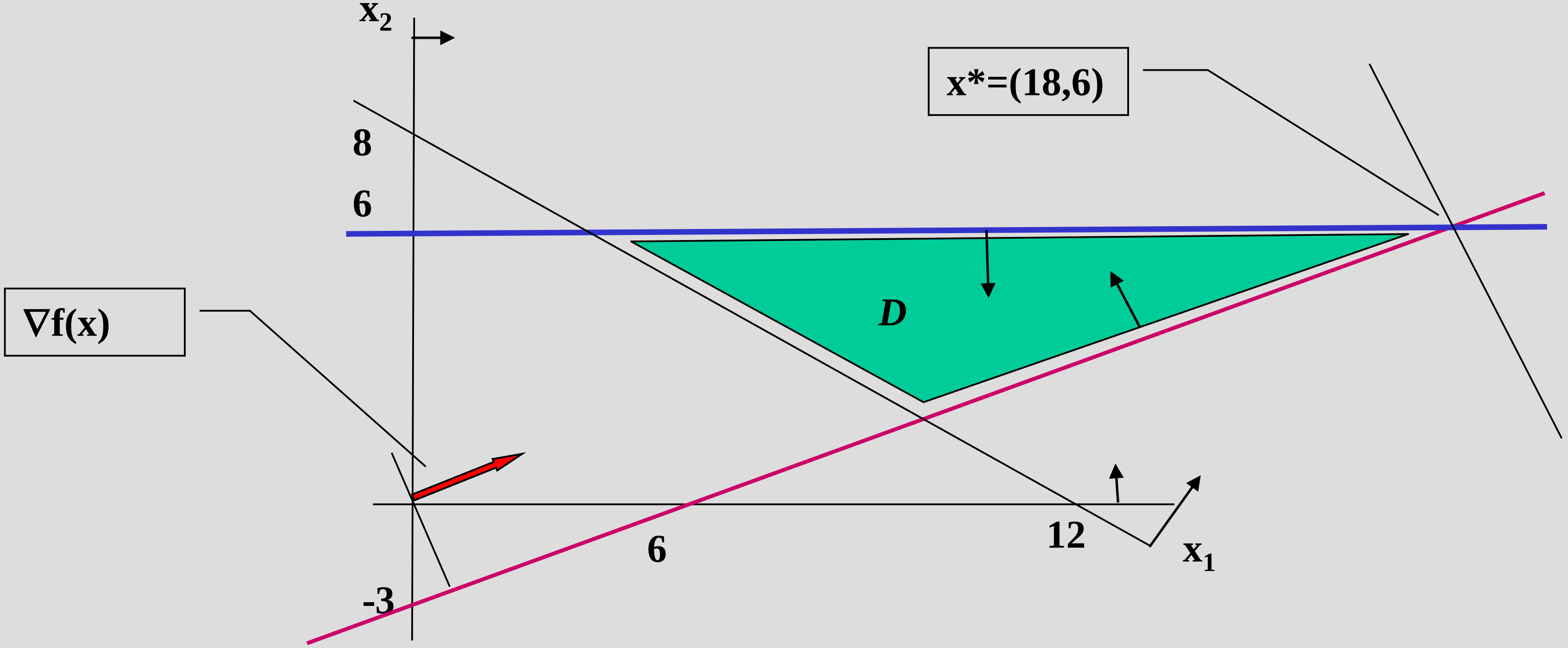
Príklad 4 (Umelé premenné v ULP)

$$f(x_1, x_1) = 3x_1 + 2x_2 \quad \rightarrow \quad max$$

p.o.

$$x_1 - 2x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 24$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Grafické riešenie úlohy



Riešnie: I. Fáza – ŠTANDARDNÝ TVAR ULP

$$h(w_1) = \qquad w_1 \quad \rightarrow \quad min$$

$$f(x_1, x_1) = 3x_1 + 2x_2 \qquad \rightarrow \quad max$$

p.o.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + s_1 \qquad\qquad &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad - s_2 + w_1 \quad &= 24 \\ 2x_2 \qquad\qquad + s_3 &= 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 & \end{aligned}$$

Tab.1 (1. Iterácia)

		x_1	x_2	s_1	s_2	w_1	s_3	
	$h(w_1)$	0	0	0	0	1	0	
	$f(x_1, x_2)$	3	2	0	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}^{\mathbf{I}}$	x_1	x_2	s_1	s_2	w_1	s_3	b
s_1	0	1	-2	1	0	0	0	6
w_1	1	2	3	0	-1	1	0	24
← s_3	0	0	2•	0	0	0	1	12
r_j^{I}		-2	-3↑	0	1	0	0	24=$h(\mathbf{w})$

Charakteristika VPBR pre prvú fázu Algoritmu

$$\mathrm{B} = \left(\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_6\right) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & w_1 & s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 24 & 12 \end{pmatrix}$$

$$h\left(w_1\right) = 24$$

$$\left(r_j^{\ I}\right) = \begin{pmatrix} -2 & \underbrace{-3}_{\min} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \geq 0$$

$\boxed{h(\mathrm{w})>0}$ $\Rightarrow$ **Prvá fáza algoritmu pokračuje**

Tab.2 (2. Iterácia)

	$h(w_1)$	0	0	0	0	1	0	
	$f(x_1, x_2)$	3	2	0	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}^{\mathrm{I}}$	x_1	x_2	s_1	s_2	w_1	s_3	b
s_1	0	1	0	1	0	0	1	18
$\leftarrow w_1$	1	2●	0	0	-1	1	-3/2	6
x_2	0	0	1	0	0	0	1/2	6
r_j^{I}		-2↑	0	0	1	0	3/2	24=$h(\mathbf{w})$

Charakteristika PBR po druhej iterácii prvej fázy algoritmu

$$\mathrm{B} = (\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_2) \quad \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad w_1 \quad s_3) = (0 \quad 6 \quad 18 \quad 0 \quad 6 \quad 0)$$

$$h(w_1) = 6$$

$$(r_j^{\ I}) = \left(\underbrace{-2}_{\text{min}} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 3/2 \right) \sim\geq 0$$

$\boxed{h(\mathbf{w})>\mathbf{0}}$ $\Rightarrow$ **prvá fáza pokračuje …**

Tab.3 (3. Iteration)

		x_1	x_2	s_1	s_2	w_1	s_3	
	$h(w_1)$	0	0	0	0	1	0	
	$f(x_1, x_2)$	3	2	0	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}^{\mathrm{I}}$ $\mathbf{c_B}^{\mathrm{I}}$	x_1	x_2	s_1	s_2	w_1	s_3	b
$\leftarrow s_1$	0 0	0	0	1	1/2•	-1/2	7/4	15
x_1	0 3	1	0	0	-1/2	1/2	-3/4	3
x_2	0 2	0	1	0	0	0	1/2	6
r_j^{I}		0	0	0	0	1	0	$0=h(\mathbf{w})$
r_j^{II}		0	0	0	$3/2\uparrow$	-3/2	5/4	$21=f$

Charakteristika PBR po tretej iterácii prvej fázy algoritmu

$$B = (\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1) \quad \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad w_1 \quad s_3) = (3 \quad 6 \quad 15 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$h(w_1) = 0$$

$$(r_j{}^I) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0) \geq 0$$

$\boxed{h(\mathbf{w})=\mathbf{0}}$ $\Rightarrow$ **Prvá fáza agoritmu úspešne končí**

$\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$ **prechod na DRUHÚ fázu**

Tab.4 (4. Iteration)

	$h(w_1)$	0	0	0	0	1	0	
	$f(x_1, x_2)$	3	2	0	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}^{\mathrm{I}}$ $\mathbf{c_B}^{\mathrm{I}}$	x_1	x_2	s_1	s_2	w_1	s_3	b
s_2	0 0	0	0	2	1	-1	7/2	30
x_1	0 3	1	0	0	0	0	1	18
x_2	0 2	0	1	0	0	0	1/2	6
r_j^{I}		0	0	0	0	1	0	$0=h(\mathbf{w})$
r_j^{II}		0	0	0	0	0	-4	$66=f(\mathbf{x})$

Charakteristik optimálneho BR po štvrtej iterácii algoritmu (po prvej iterácii v rámci druhej fázy)

$$\mathrm{B}=\left(\mathbf{A}_4,\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2\right) \quad \mathbf{x}=\left(x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad w_1 \quad s_3\right)=\left(18 \quad 6 \quad 0 \quad 30 \quad 0 \quad 0\right)$$

$$f\left(\mathbf{x}\right)=66$$

$$\left(r_j^{\ I}\right)=\left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -4\right)<0$$

Druhá fáza algoritmu úspešne končí

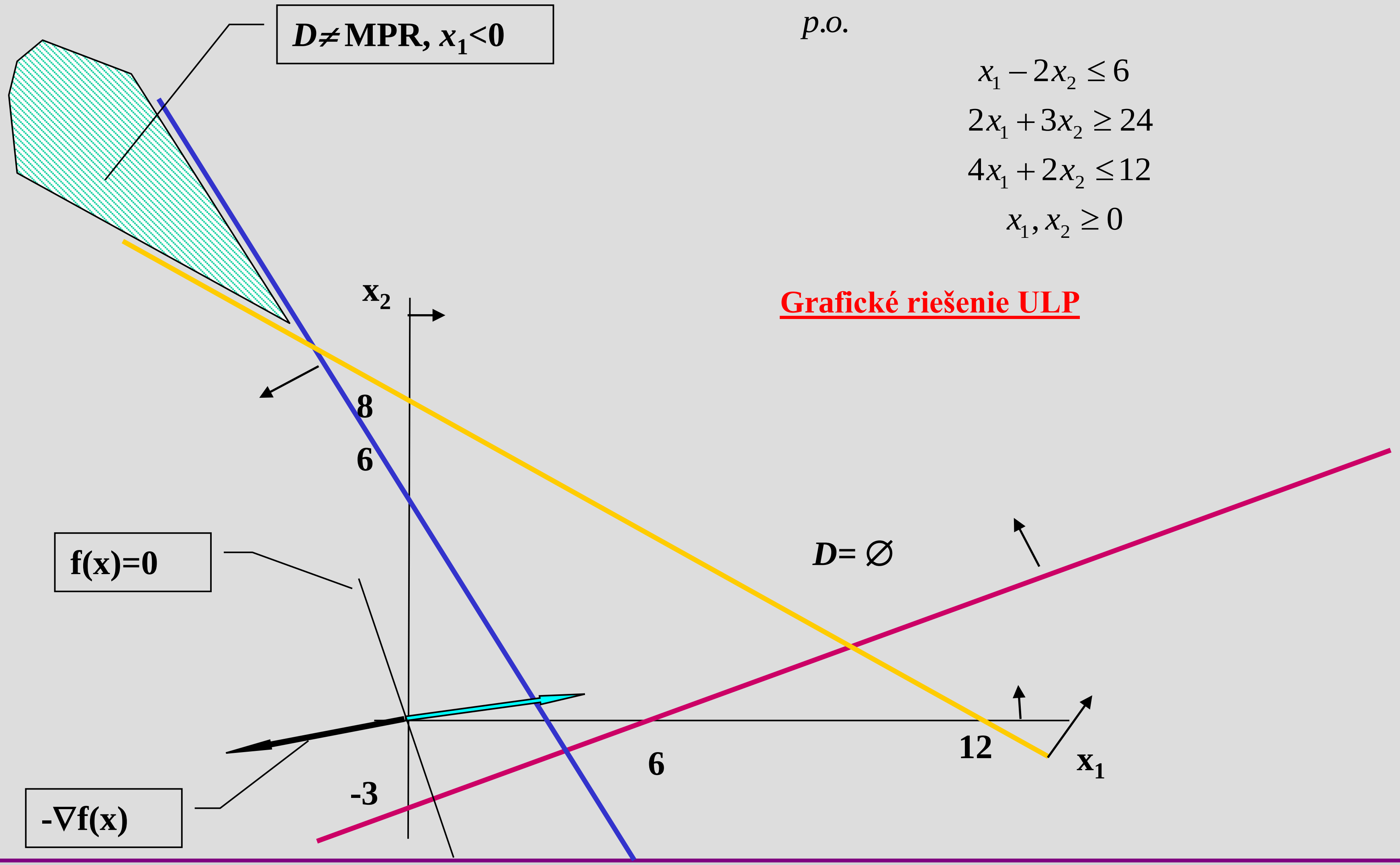
Príklad 5 (Neprípustné riešenie ULP)

$$f(x_1, x_1) = 4x_1 + x_2 \quad \to \quad min$$

$p.o.$

$$x_1 - 2x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 24$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Grafické riešenie ULP



Riešenie: I. Fáza – STANDARDNÝ TVAR ULP

$$h(w_1) = \qquad w_1 \quad \rightarrow \quad min$$

$$f(x_1, x_1) = 4x_1 + x_2 \qquad \rightarrow \quad min$$

$U.B.$

$$x_1 - 2x_2 + s_1 \qquad = 6$$
$$2x_1 + 3x_2 \quad - s_2 + w_1 \quad = 24$$
$$4x_1 + 2x_2 \qquad + s_3 = 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Tab.1 (1. Iteration)

	$h(w_1)$	0	0	0	0	1	0	
	$f(x_1, x_2)$	4	1	0	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}^{\mathbf{I}}$	x_1	x_2	s_1	s_2	w_1	s_3	b
s_1	0	1	-2	1	0	0	0	6
w_1	1	2	3	0	-1	1	0	24
← s_3	0	4	2•	0	0	0	1	12
r_j^{I}		-2	-3↑	0	1	0	0	24=$h(\mathbf{w})$

Charakteristika VPBR pre prvú fázu algoritmu

$$\mathrm{B}=\left(\mathbf{A}_3,\mathbf{A}_5,\mathbf{A}_6\right) \quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & w_1 & s_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 6 & 0 & 24 & 12\end{pmatrix}$$

$$h(w_1)=24$$

$$\left(r_j^{\ I}\right)=\begin{pmatrix}-2 & \underbrace{-3}_{\min} & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\geq 0$$

$\boxed{h(\mathbf{w})>\mathbf{0}}$ $\Rightarrow$ **Prvá fáza algoritmu pokračuje**

Tab.2 (2. Iteration)

	$h(w_1)$	0	0	0	0	1	0	
	$f(x_1, x_2)$	3	2	0	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}^{\mathrm{I}}$	x_1	x_2	s_1	s_2	w_1	s_3	b
s_1	0	5	0	1	0	0	1	18
w_1	1	-4	0	0	-1	1	-3/2	6
x_2	0	2	1	0	0	0	1/2	6
r_j^{I}		4	0	0	1	0	3/2	$6=h(\mathbf{w})$

Charakteristika PBR po druhej iterácii prvej fázy algoritmu :

$$\mathrm{B} = \left(\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_2\right) \quad \mathbf{x} = \left(x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad w_1 \quad s_3\right) = \left(0 \quad 6 \quad 18 \quad 0 \quad 6 \quad 0\right)$$

$$h\left(w_1\right) = 6$$

$$\left(r_j^{\ I}\right) = \left(4 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 3/2\right) \geq 0$$

Vidíme, že všetky koeficienty redukovaných ocenení sú nezáporné

$$\left(r_j^{\,I}\right) = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2\end{pmatrix} \geq 0$$

t. z., že sme našli optimálne riešenie prvej fázy a prvá fáza algoritmu teda končí

Zárove´je však hodnota pomocnej účelovej funkcie kladná

$\boxed{h(\mathrm{w})>0}$ $\Rightarrow$ **Preto pôvodná ULP hat nemá prípustné riešenie.**

!!! Algoritmu končí

Optimálne riešenie prvej fázy algoritmu je pseudooptimálnym riešením ULP

$$\mathrm{B}^{psopt} = \left(\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_2\right) \quad \mathbf{x}^{psopt} = \begin{pmatrix}x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & w_1 & s_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 6 & 18 & 0 & 6 & 0\end{pmatrix}$$
$$f\left(\mathbf{x}^{psopt}\right) = 12$$

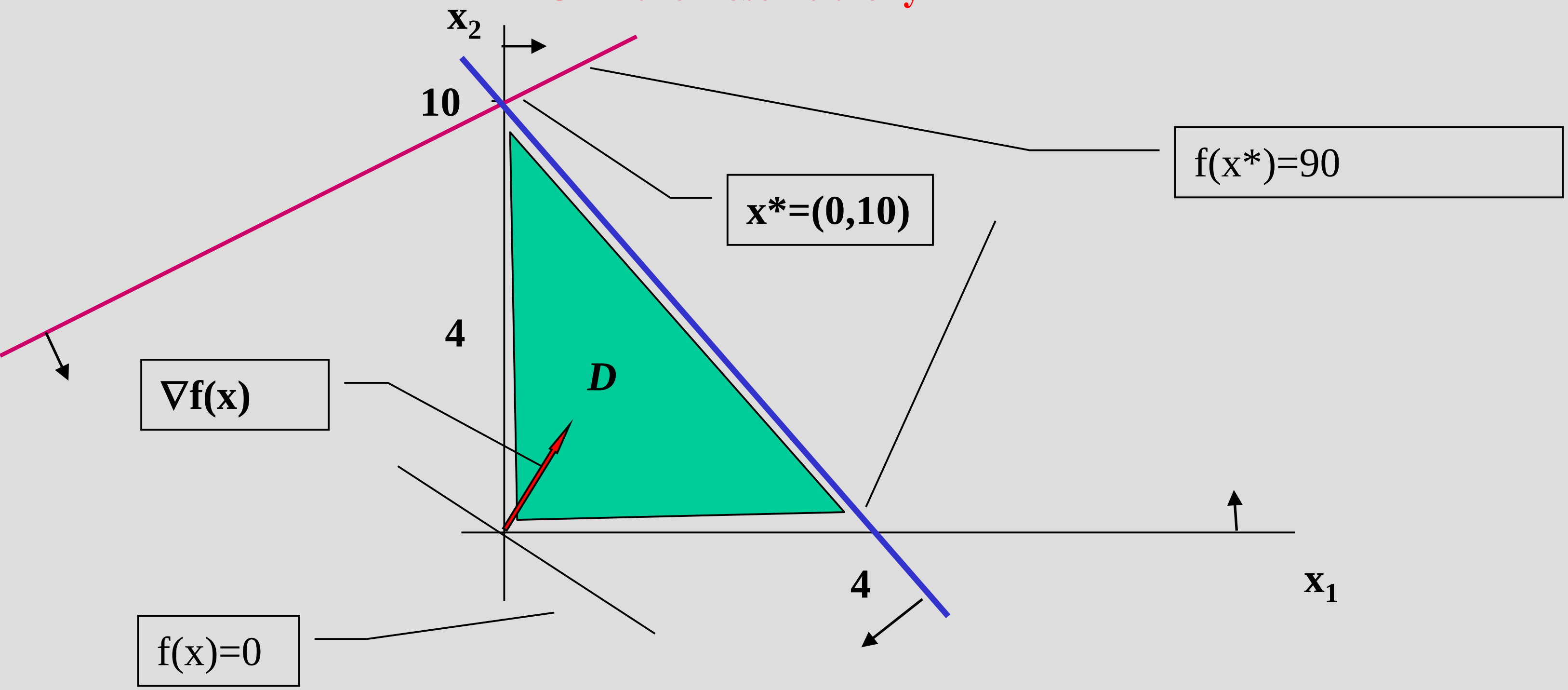
Príklad 7 (Degenerované optimálne riešenie)

$$f(x_1, x_1) = 2x_1 + 9x_2 \quad \rightarrow \quad max$$

$p.o.$

$$10x_1 + 4x_2 \leq 40$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Grafické riešenie úlohy



Je daná maticová forma zápisu úlohy ineárneho programovania v štandardnom tvare ST_LOP

$$\max\left\{ f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \;\middle|\; \mathbf{Ax} = \mathbf{b}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \mathbf{A} \in R^{m\times n};\ \mathbf{c},\mathbf{x} \in R^n; \mathbf{b} \in R^m \right\}$$

Pričom

$m \leq n$; $h(\mathbf{A}) = m$

Otázka:

Akým spôsobom budeme interpretovať *bázické DEGENEROVANÉ prípustné riešenie úlohy lineárneho programovania* ?

Definícia:

Je daná úloha lineárneho programovania v štandardnom tvare LOP_ST a platí m <= n a hodnosť matice sústavy ohraničení je h(A)=m. *Bázické riešenie úlohy potom nazývame degenerovaným*, ak má menej ako *m* premenných nenulových a zostávajúce premenné majú nulové hodnoty.

Poznámka:

Degenerované bázické riešenie má pravdaže pri hodnosti matice sústavy ohraničení h(A)=m počet bázických premenných *m*, ibaže niektoré bázické premenné prislúchajúce bázickým stĺpcom matice sústavy ohraničení **A** majú nulové hodnoty.

Poznámka:

Ak degenerované bázické riešenie má pri hodnosti matice sústavy ohraničení *h*(A)=*m* počet nenulových bázických premenných *k*<*m*, hovoríme, že bázické degenerované riešenie má stupeň degenerovanosti *m*-*k*.

Riešenie

Tab.1

	$f(x_1, x_2)$	2	9	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	b
$\leftarrow s_1$	0	10	4•	1	0	40
s_2	0	-1	2	0	1	20
r_j		2	$9\uparrow$	0	0	0

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Východiskové bázické prípustné riešenie:

$$\mathrm{B} = (\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 20 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2) = 0$$

$$(r_j) = \begin{pmatrix} 2 & \underbrace{9}_{\max} & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \leq 0$$

Tab.2

	$f(x_1, x_2)$	2	9	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_2	9	10/4	1	1/4	0	10
s_2	0	-6	0	-1/2	1	0
r_j		-41/2	0	-9/4	0	90

Degenerované optimálne riešenie po 1. iterácii:

$$\mathrm{B} = (\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4) \quad \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2) = (0 \quad 10 \quad 0 \quad 0)$$

$$f(x_1, x_2) = 90$$

$$(r_j) = (-41/2 \quad 0 \quad -9/4 \quad 0) \leq 0 \quad \mathbf{x} \equiv \mathbf{OR}$$

Stupeň degenerovanosti dg = hodnosť matice A – počet nenulových bázických premenných k

dg= m – k = 2 – 1 = 1

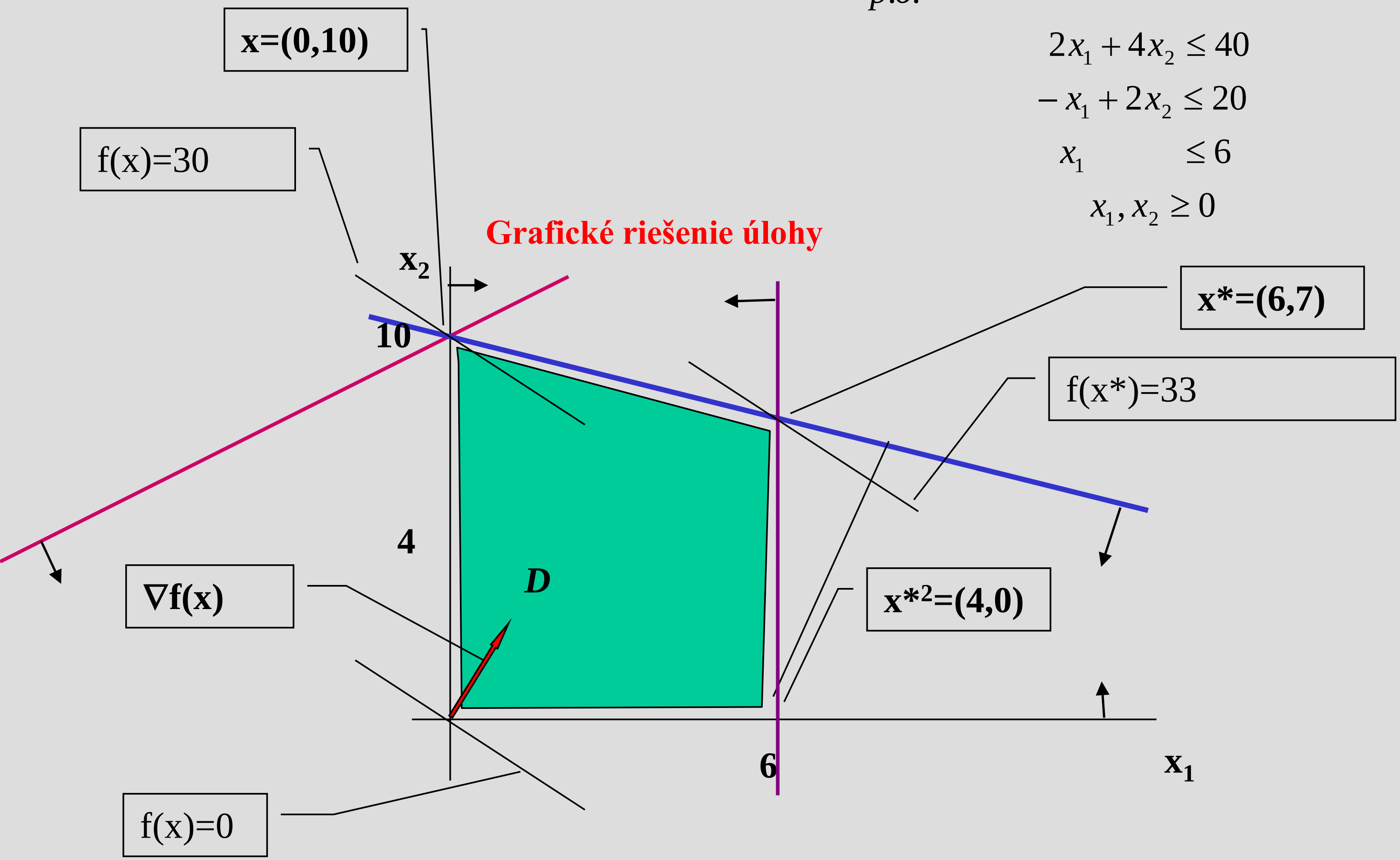
Príklad 8 (Odstránenie degenerovanosti počas riešenia)

$$f(x_1, x_1) = 2x_1 + 3x_2 \quad \to \quad max$$

$p.o.$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\le 40 \\ -x_1 + 2x_2 &\le 20 \\ x_1 \qquad &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Grafické riešenie úlohy



Riešenie

Tab.1

	$f(x_1, x_2)$	2	3	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
$\leftarrow s_1$	0	2	4•	1	0	0	40
s_2	0	-1	2	0	1	0	20
s_3	0	1	0	0	0	1	6
r_j		2	$3\uparrow$	0	0	0	0

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Východiskové bázické prípustné riešenie:

$$\mathrm{B} = (\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5) \quad \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3) = (0 \quad 0 \quad 40 \quad 20 \quad 6)$$

$$f(x_1, x_2) = 0$$

$$(r_j) = \begin{pmatrix} 2 & \underbrace{3}_{\max} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \leq 0$$

Riešenie

Tab.2

	$f(x_1, x_2)$	2	3	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
x_2	3	1/2	1	1/4	0	0	10
s_2	0	-2	0	-1/2	1	0	0
$\leftarrow s_3$	0	1●	0	-1/2	0	1	6
r_j		1/2↑	0	-1	0	0	30

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Východiskové bázické prípustné riešenie:

$$\mathrm{B} = \left(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5\right) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$f\left(x_1, x_2\right) = 30$$

$$\left(r_j\right) = \begin{pmatrix} \underbrace{1/2}_{\max} & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \leq 0$$

Riešenie

Tab.2

	$f(x_1, x_2)$	2	3	0	0	0	
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
x_2	3	0	1	1/2	0	-1/2	7
s_2	0	0	0	1/2	1	2	12
x_1	2	1	0	-1/2	0	1	6
r_j		0	0	-1/2	0	-1/2	33

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Východiskové bázické prípustné riešenie:

$$\mathrm{B} = \left(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_1\right) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2) = 30$$

$$(r_j) = \begin{pmatrix} \underbrace{1/2}_{\max} & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \leq 0$$