Modely a metódy lineárneho a celočíselného programovania

(Tézy k prenáške č. 1)

Téma prednášky

Úvod

Lineárny optimalizačný model voľby optimálnej výrobnej stratégie firmy

Prof. Dr. Michal Fendek

Katedra operačného výskumu a ekonmetrie

Ekonomická univerzita Bratislava

Dolnozemská 1

852 35 Bratislava

Všeobecná štruktúra riešenia úloh rozhodovania v oblasti ekonomických procesov s použitím kvantitatívnych modelov a metód

Proces riešenia problému: *4 Fázy*

1. Fáza: Konštrukcia ekonomicko-matematického modelu pre použitie metód Operačného výskumu

2. **Fáza: Príprava databázy pre konštrukciu ekonomicko-matematického modelu**

- **Efektívne využitie existujúcich databáz**
  - **kompatibilita s charakterom modelu**

- **Pozitívne využitie podpory databázových prostredí**

- **Pri rozsiahlych modeloch priemyselných aplikácií veľmi náročná fáza – tímový aspekt**

3. Fáza:

3.1 Pre zostavený ekonomicko-matematický model a disponibilnú databázu definujeme na modeli matematickú úlohu rozhodovania

3.2 Riešenie matematickej úlohy rozhodovania s využitím konkrétnej metódy Operačného výskumu

- Lineárne programovanie
- Nelineárne programovanie
- Celočíselné a bivalentné programovanie • Dynamische Optimierung
- Stochastické programovamnie
- Sieťová analýza
- Teória hier
- Input – Output Analýza
- Simulačné modely a metódy
- Teória hromadnej obsluhy
- Teória zásob
- Prognostické modely a metódy

● **Dôležitá úloha – výpočtová technika**

● **V minulosti ohraničené možnosti IT prostriedkov a softvérových produktov**

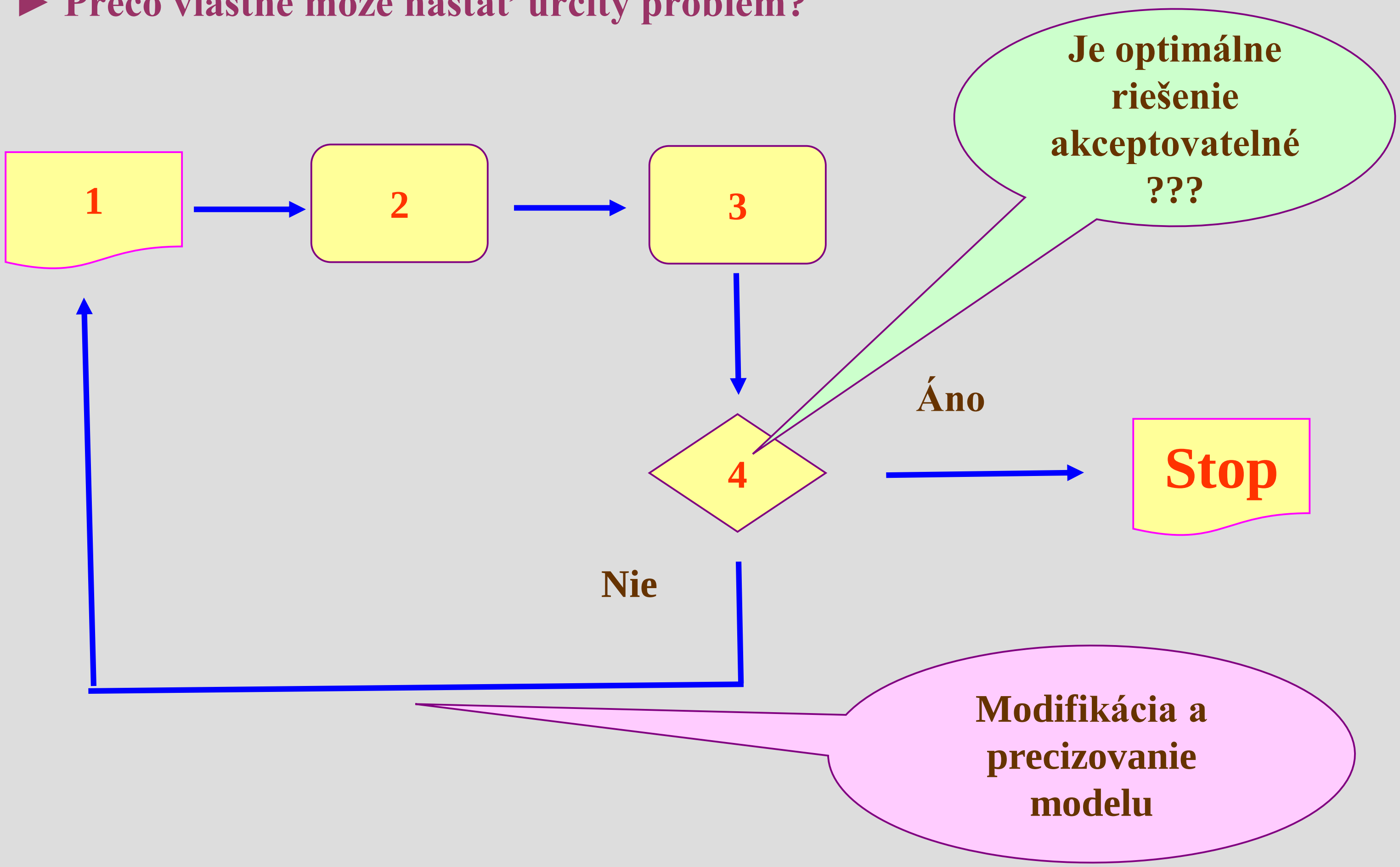
● **Stav v tejto oblasti ovplyvňoval využitie Výpočtovej techniky a adekvátnych programových produktov pri riešení úloh z oblasti OV**

• **Dnes situácia diametrálne odlišná**

- **PC**
- **široká ponuka softvérových produktov SOLVER FOR EXCELL, GAMS, LINDO, MINOS, …**

Fáza 4: Verifikácia výrokovej schopnosti riešenia rozhodovacieho problému s použitím konkrétnej metódy operačného výskumu

► ► **Prečo vlastne môže nastať určitý problém?**



Príklad - Lineárny optimalizačný model voľby optimálnej výrobnej stratégie firmy:

- Budeme skúmať hypotetickú firmu.

- Firma má vo výrobnom programe 5 výrobkov P_1, P_2, P_3, P_4 a P_5

- Pre výrobu týchto 5 výrobkov firma využíva 3 výrobné faktory.

Dispozícia modelu:

a) Základné východiská:

- údaje o spotrebných normách 3 výrobných faktorov pre jednotlivé produkty a_{ij}, i = 1, 2, 3; j = 1, 2, ..., 5

- údaje o disponibilných zásobách používaných výrobných faktorov b_i, i = 1, 2, 3

- údaje o cenách p_j a celkových výrobných nákladoch k_j pre jednotlivé produkty výrobného programu firmy, j = 1, 2, ..., 5

Tieto údaje o jednotlivých produktoch výrobného programu firmy sú prezentované v tabuľke 1.

Tabuľka 1.

výrobný faktor	Normy spotreby výrobných faktorov					disponibilné zásoby výrobných faktorov
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
F_1	-1	2	3	7	2	1110
F_2	2	5	2	-2	3	1250
F_3	2	-1	2	11	-1	950
Individuálne výrobné kapacity linky	125	200	200	250	500	100%
Štátne objednávky	-	-	-	-	50	-
Horné hranice odbytu	40	60	-	-	-	-
Cena	6	10	6	7	8	-
Celkové náklady	3	8	2	2	3	-
Zisk	3	2	4	5	5	-

b) Medzi objemami výroby jednotlivých výrobkov na jednej strane a medzi

spotrebou výrobných faktorov,
ziskom z predaja produkcie
a celkovými nákladmi produkcie

na strane druhej platia vzťahy lineárnej závislosti.

c) Podnik využíva pri výrobe unikátne zariadenia s ohraničenou kapacitou výkonu, pričom sú známe individuálne výrobné kapacity linky v prípade samostatnej výroby jednotlivých výrobkov (Tab. 1).

d) Na základe marketingovej analýzy trhu má firma nasledovné informácie o reálnych možnostiach predaja svojich produktov:

- objem výroby produktov P_1, P_2, ktoré sú určené pre domáci trh je na základe informácií o potenciálnom odbyte zhora ohraničený

- objem výroby produktov P_3, P_4, ktoré sú určené pre export je na základe informácií o potenciálnom odbyte neohraničený

- objem výroby produktu P_5 je na základe štátnej objednávky fixovaný, pevne stanovený

Úlohy:

Vypočítajme optimálnu výrobnú stratégiu firmy pri súplnení nasledovných požiadaviek.:

a) Cieľom firmy je realizovať maximálny zisk.

b) Výrobná spotreba každého výrobného faktora neprevýši jeho disponibilnú zásobu,

c) Výrobná kapacita linky bude využitá na 100%,

d) Optimálna výrobná stratégia firmy bude rešpektovať výsledky marketingovej analýzy trhu.

Úvod

Riešenie

Pre výpočet optimálne výrobnej stratégie firmy použijeme úlohu lineárneho programovania v nasledovnom tvare:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min$$

pri ohrničeniach

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\geq, \leq, =\} b_i \quad i = ,\dots,m$$

$$x_j \in D_j \quad j = 1,\dots,n$$

kdeč

- **m – počet ohraničení úlohy,**
- **n – počet premenných úlohy,**
- **c_j – koeficienty účelovej funkcie, j=1,...,n,**
- **b_i – koeficienty pravej strany ohraničení úlohy, i=1,...,m,**
- **a_{ij} – koeficienty matice sústavy ohraničení úlohy, i=1,...,m, j=1,...,n,**
- **x_j – rozhodovacie premenné úlohy, j=1,...,n,**
- **D_j – množiny prípustných hodnôt jednotlivých rozhodovacích premenených úlohy, j=1,...,n.**

Analytická formulácia optimalizačnej úlohy

$$f(x_1, x_2, \dots, x_5) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 5x_5 \to \max$$

pri ohraničeniach

$$-1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 2x_5 \le 1110$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 \le 1250$$

$$2x_1 - 1x_2 + 2x_3 + 11x_4 - 1x_5 \le 950$$

$$\frac{1}{125}x_1 + \frac{1}{200}x_2 + \frac{1}{200}x_3 + \frac{1}{250}x_4 + \frac{1}{500}x_5 = 1$$

$$0 \le x_1 \le 40, \quad 0 \le x_2 \le 60$$
$$x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0$$
$$x_5 = 50$$

Všeobecná formulácia úlohy lineárneho programovania

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (1)$$

pri ohraničeniach

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\geq, \leq, =\} b_i \quad i = ,\ldots, m \qquad (2)$$

$$x_j \in D_j \qquad j = 1,\ldots,n \qquad (3)$$

pričom vzťahy (1), (2), (3) majú nasledovný význam

(1) – účelová funkcia optimalizačnej úlohy

$$f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

(2) – sústava štruktúrnych ohraničení úlohy

a. **s nerovnicami v tvare ≥, alebo ≤,**
b. **resp. v tvare rovníc =**

- **Ohraničenia v tvare nerovníc**

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i \quad \text{pre niektoré } i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i \quad \text{pre niektoré } i$$

- **Ohraničenia v tvare rovníc**

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad \text{pre niektoré } i$$

(3) – sústava triviálnych ohraničení, ktorá definuje pre každú rozhodovaacciu premennúmnožinu jej prípustných hodnôt,

$$x_j \in D_j \quad \text{pre } \forall \ j = 1, \ldots, n$$

pričom množina D_j môže mať napr. takúto definíciu

$$D_j = \langle 0; \infty) \quad pre \ niektoré \ j$$

$$D_j = \langle d_j; h_j \rangle \quad pre \ niektoré \ j; \ d_j - dol.\ hranica, \ h_j - hor.\ hranica$$

$$D_j = \langle 0; \infty) \wedge \in Z \quad pre \ niektoré \ j$$

$$D_j = \{0,1\} \quad pre \ niektoré \ j$$

atď.

Poznámka:

V prvej časti prednášok sa budeme zaoberať úlohami lineárneho programovania s nezápornými rozhodovacími premennými.

To znamená, že pre všetky rozgodovacie premenné platí:

$$x_j \in D_j = \langle 0; \infty) \qquad pre \, \forall \; j$$

Všeobecná formulácia úlohy lineárneho programovania:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (1)$$

pri ohraničeniach

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\geq, \leq, =\} b_i \quad i = ,\ldots,m \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,\ldots,n \qquad (3)$$