

Ekonomická univerzita v Bratislave
Fakulta hospodárskej informatiky

Modelovanie pravdepodobnosti defaultu

Mgr. Andrea Kaderová, PhD.
Katedra matematiky

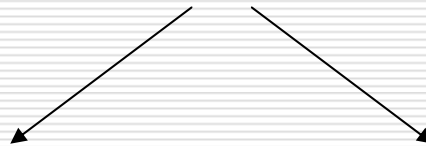
január 2010

Výpočet P_{def}

modelovanie pravdepodobnosti zlyhania



prístup využívajúci trhové indikátory kreditnej kvality



redukované modely

štrukturálne modely

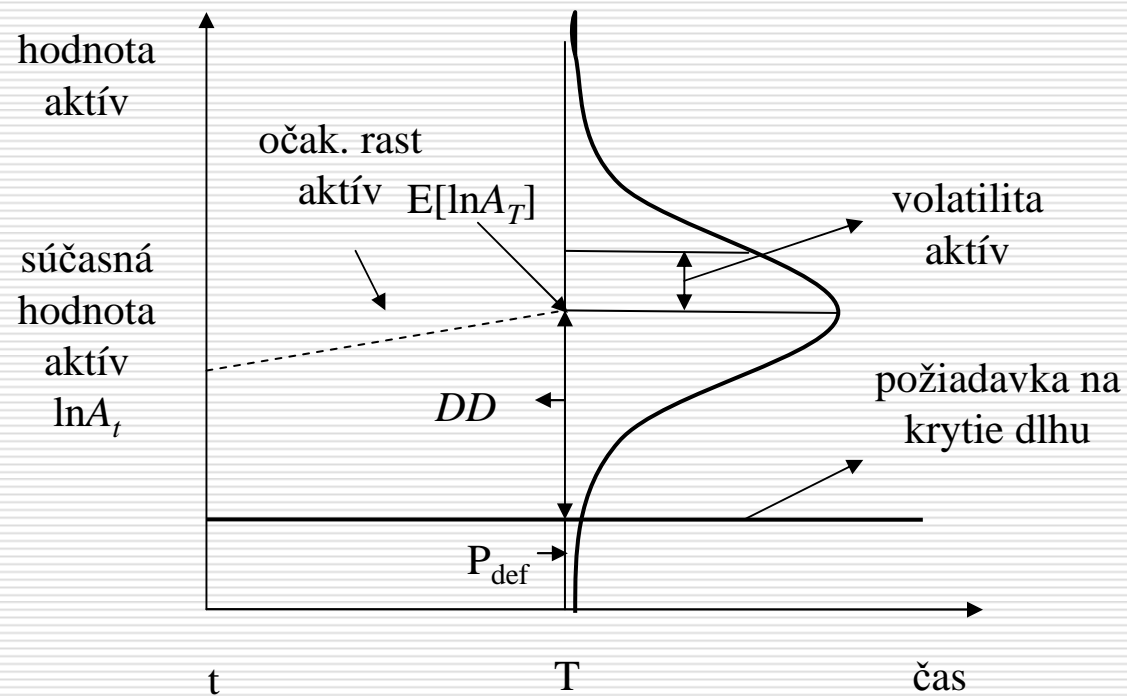
Štruktúrálny prístup k prognóze zlyhania dlžníka

Prístup

- kde hodnota nástrojov s faktorom kreditného rizika je funkciou charakteristík **aktív firmy**,
 - ktorý je závislý na ekonomickej argumentácii,
 - kde základné premenné sú **hodnota aktív firmy** a ich **volatilita**.
-

Rozdelenie hodnôt aktív v čase

$$DD = \frac{\text{trhová hodnota aktív} - \text{bod zlyhania}}{\text{trhová hodnota aktív} \cdot \text{volatilita aktív}}$$



Pravdepodobnosť zlyhania dlžníka

$$\ln A_T \sim N\left(\ln A_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T - t), \sigma^2 \cdot (T - t)\right)$$

$$A_T = E_T + L$$

$$P[A_t \leq L_t] = P[\ln A_t \leq \ln L_t]$$

Pravdepodobnosť zlyhania dlžníka

$$P_{def} = \Phi \left[\frac{\ln \frac{L}{A_t} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T - t)}{\sigma \cdot \sqrt{(T - t)}} \right]$$

$$DD = \frac{\ln \frac{A_t}{L} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T - t)}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}} \Rightarrow P_{def} = \Phi[-DD]$$

Aplikácia štruktúrálnych modelov

Pravdepodobnosť zlyhania fiktívnej spoločnosti

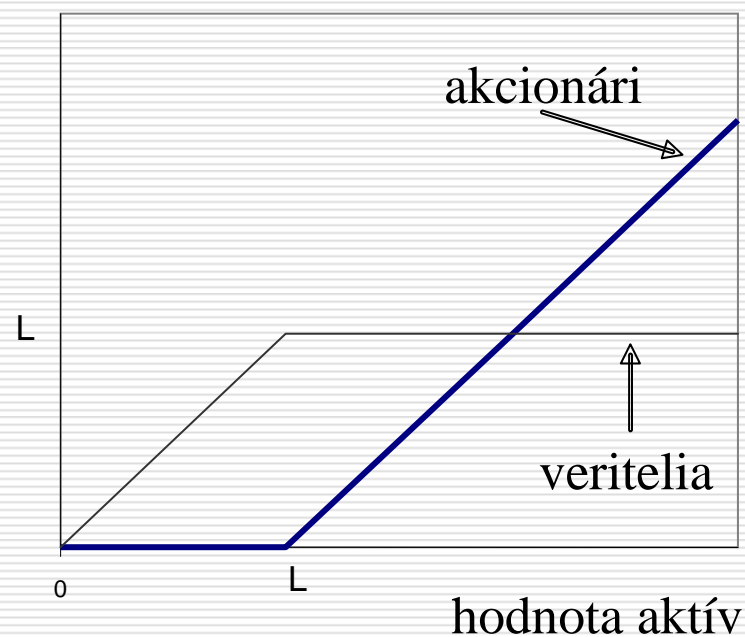
1. Mertonov model s 1 - ročnou splatnosťou:

I. iterácia

II. sústava dvoch rovníc

2. Mertonov model s t - ročnou splatnosťou

Výplatný diagram



- Vlastné imanie je zostatková hodnota aktív po vyplatení všetkých záväzkov.
 - Kúpna opcia na aktíva má tú istú vlastnosť.
-

Mertonov model, $t = 1$, iterácia

$$E_t = A_t \Phi(d_1) - L_t e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad \Rightarrow \quad A_t = \frac{[E_t + L_t e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)]}{\Phi(d_1)}$$

$$A_t = [E_t + L_t e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)] / \Phi(d_1)$$

$$A_{t-1} = [E_{t-1} + L_{t-1} e^{-r_{t-1}(T-(t-1))} \Phi(d_2)] / \Phi(d_1)$$

⋮

$$A_{t-260} = [E_{t-260} + L_{t-260} e^{-r_{t-260}(T-(t-260))} \Phi(d_2)] / \Phi(d_1).$$

Mertonov model, $t = 1$, iterácia

Prvý problém: Použitie v čase sa meniacej úrokovej miery i záväzkov je v nesúlade s podmienkami Mertonovho modelu, v ktorom sú obe spomínané záležitosti konštantné.

Druhý problém: Vyzerá to však tak, že okrem týchto neznámych máme aj ďalšiu neznámu a to volatilitu aktív.

$$A_t = \left[E_t + L_t e^{-r_t} \Phi(d_2) \right] / \Phi(d_1)$$

$$A_{t-1} = \left[E_{t-1} + L_{t-1} e^{-r_{t-1}} \Phi(d_2) \right] / \Phi(d_1)$$

⋮

$$A_{t-260} = \left[E_{t-260} + L_{t-260} e^{-r_{t-260}} \Phi(d_2) \right] / \Phi(d_1).$$

T4.1	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Dáta (hodnoty v bn)				Výpočty			
2		vlastné	záväzky	bezrizik.		hodnota aktív A_t		volatilita aktív σ	
3		ímanie E_t	L_t	úr. miera r		iter k	iter $k+1$	iter k	iter $k+1$
4		62716	34797	6,0%		95 490	95 490		28,23%
5		63039	34797	6,0%		95 797	95 797	0,32%	
6		63039	34797	6,0%		95 805	95 805	0,01%	4,49E-11
7		63547	34797	6,0%		96 321	96 321	0,54%	
8		62346	34797	6,0%		95 117	95 117	-1,26%	
9		61330	34797	6,0%		94 092	94 092	-1,08%	
10		62208	34797	6,0%		94 976	94 976	0,93%	
11		63547	34797	6,0%		96 314	96 314	1,40%	
...		
261		28615	51652	3,4%		79 618	79 618	0,39%	
262		27970	51652	3,4%		79 026	79 026	-0,75%	
263		26620	51652	3,3%		77 797	77 797	-1,57%	
264		26237	51652	3,4%		77 395	77 395	-0,52%	

T4.2	A	B	C	D	E	F	G
2		aktíva	S&P 500	bezrizik.		očakávané prírastky výnosov	
3		A_t	R_M	úr. miera R_f		aktíva	S&P 500
4		95 490	1517,68	6,18%			
5		95 797	1520,77	6,23%		0,30%	0,18%
6		95 805	1520,77	6,21%		-0,02%	-0,02%
7		96 321	1507,08	6,18%		0,51%	-0,92%
8		95 117	1492,25	6,19%		-1,27%	-1,01%
9		94 092	1502,51	6,22%		-1,10%	0,66%
10		94 976	1494,50	6,20%		0,91%	-0,56%
11		96 314	1489,26	6,20%		1,39%	-0,37%
12		96 416	1481,99	6,17%		0,08%	-0,51%
13		96 662	1484,91	6,12%		0,23%	0,17%
14		97 029	1480,87	6,13%		0,36%	-0,30%
15		98 872	1465,81	6,14%		1,88%	-1,04%
16		98 894	1444,51	6,07%		0,00%	-1,48%
17		95 517	1459,90	6,09%		-3,44%	1,04%
...	
263		77 797	1129,03	3,38%		-1,57%	-1,71%
264		77 395	1133,58	3,47%		-0,53%	0,39%

1	A	B	C	D	E
2	Odhady				
3	hodnota aktív A_t	77 395	(z Tab. 4.1)		
4	volatilita aktív σ	28,2%	(z Tab. 4.1)		
5	prírastok μ	4,5%			
6	Dáta zo súvahy				
7	záväzky L	51 652	(z Tab. 4.1)		
8	Pravdepodobnosť zlyhania				
9	DD	1,45	=(LN(B3)+(B4-B5^2/2)-LN(B7))/B5		
10	P_{def}	7,34%	=NORMSDIST(-B9)		

Iný pohľad na BS rovnicu – dve neznáme

Tretí problém: Nájdeme ešte jednu rovnicu o tých istých dvoch neznámych?

Mertonov model, $t=1$, sústava dvoch rovníc (neznáme A_t , σ)

prvá rovnica (B-S): $E_t = A_t \Phi(d_1) - L_t e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$

$$dE_t = \left(\frac{\partial E_t}{\partial t} + \mu \cdot A_t \cdot \frac{\partial E_t}{\partial A_t} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{\partial^2 E_t}{\partial x^2} \right) \cdot dt + \sigma \cdot A_t \cdot \frac{\partial E_t}{\partial A_t} \cdot dz$$

$$dE_t = \mu_E \cdot E_t \cdot dt + \sigma_E \cdot E_t \cdot dz$$

$$\sigma_E \cdot E_t = \frac{\partial E_t}{\partial A_t} \cdot A_t \cdot \sigma$$

po zderivovaní podľa A_t

$$\frac{\partial E_t}{\partial A_t} = \Phi(d_1)$$

druhá rovnica: $\sigma_E = \frac{A_t}{E_t} \cdot \Phi(d_1) \cdot \sigma$

	A	B	C
1		uzavierací kurz A_t	denný log výnos
2		84,88	
3		85,31	0,51%
4		85,31	0,00%
5		86	0,81%
6		84,38	-1,90%
7		83	-1,65%
8		84,19	1,42%
...	
260		37,3	-2,28%
261		35,5	-4,95%
262		34,99	-1,45%

ročná volatilita σ_E
 45,65%
 =STDEV(C3:C262)*260^0.5

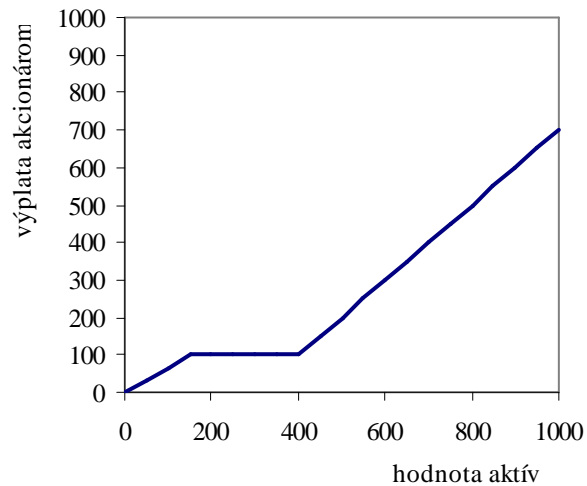
Tu už riešime dve rovnice o dvoch neznámych. Aby sa v Exceli urýchlil celý proces, tak musíme vhodne zvoliť štartovacie hodnoty. Pre A_t to nie je problém.

Štrťý problém: Pre σ to menší problém je. Vyjadríme ho z „druhej rovnice“, ale využijeme predpoklad $\Phi(d_1) = 1$

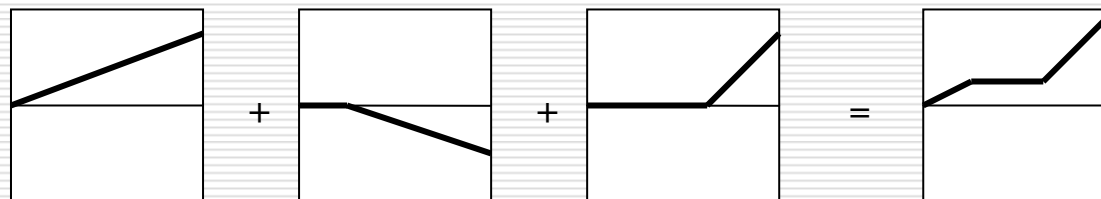
$$d_1 = \frac{\ln(A_t / L) + (r + \sigma^2 / 2) \cdot (T - t)}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}} \quad DD = \frac{\ln \frac{A_t}{L} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T - t)}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}} \Rightarrow P_{def} = \Phi[-DD]$$

	A	B	C	D	E
1	Dáta/Predpoklady				
2	vlastné imanie E_t	26 237	T4.1		
3	volatilita σ_E	45,65%			
4	záväzky L_t	51 652	T4.1		
5	bezriz. úr. miera r	3,41%			
6	čas ($T-t$)	1			
7					
8	Neznáme				
9	hodnota aktív A_t	76 146	(počiatočná hodnota: =B2+B4)		
10	volatilita aktív σ	15,78%	(počiatočná hodnota: =B3*B2/B9)	$\sigma = \sigma_E \cdot \frac{E_t}{A_t}$	
11					
12	Hodnoty z B-S rovnice				
13	d_1	2,76	=(LN(B9/B4)+(B5+B10^2/2)*B6)/(B10*B6^0.5)		
14	d_2	2,6	=B13-B10*B6^0.5		
15	vlastné imanie E_t	26 237	=B9*NORMSDIST(B13)-B4*EXP(-B5*B6)*NORMSDIST(B14)		
16	volatilita σ_E	45,65%	=(B9/B15)*B10*NORMSDIST(B13)		

Výplata akcionárom v čase T



- podiel z aktív (long stock)
- podiel z predaja call opcie na aktíva (short call)
- kúpa call opcie na aktíva (long call)



Porovnanie riešení...

Mertonov model, $t = 1$ rok	iteračná met.	2 rovnice
hodnota aktív A_t	77395	76146
volatilita hodnoty aktív σ	28,23%	15,78 %
pravdepodobnosť zlyhania	7,35%	0,38 %

Mertonov model
 $t = 5.53$ roka



hodnota aktív A_t	69835
volatilita hodnoty aktív σ	20,59 %
pravdepodobnosť zlyhania	31,37 %

ak $t = 1$, tak $P_{\text{def}} (\text{p.a.}) = 1 - (1 - 0,3137)^{1/5,5} = 6,58\%$